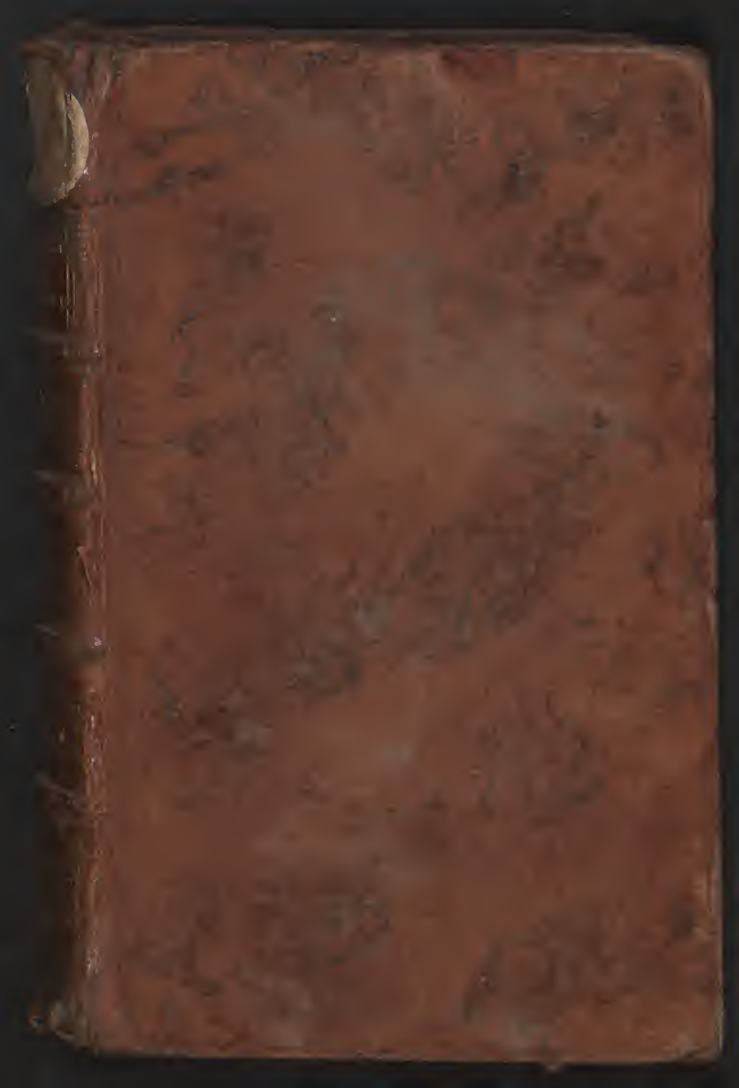
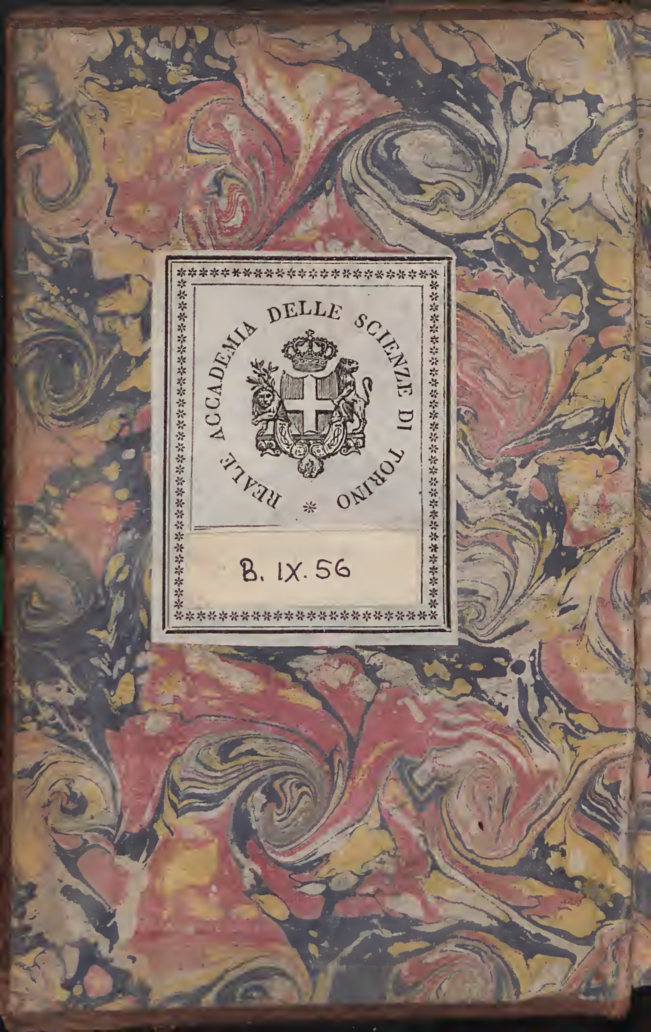
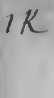



REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO
B. IX. 56






ACCADEMIA DELLE SCIENZE
TORINO

ELEMENS
DE
GEOMETRIE.

Par M. CLAIRAUT, *de l'Académie Royale des Sciences, & de la Société Royale de Londres.*



A PARIS;

Chez LAMBERT & DURAND, Libraires; ruë Saint-Jacques, au Grifon.

M DCC XLI.

Avec Approbation & Privilége du Roi.



A MONSEIGNEUR LE COMTE DE MAUREPAS, MINISTRE ET SECRETAIRE D'ETAT, COMMANDEUR DES ORDRES DU ROY.

ONSEIGNEUR,

C'est peut-être oublier la supériorité de vos connoissances, que de vous

présenter des Elémens de Géométrie; mais c'est connoître vos vuës que de vous offrir quelque chose d'utile.

Je ne dois donc point appréhender de mettre sous votre protection un Ouvrage qui contient les principes d'une Science dont vous partagez nécessairement les succès. Je vous supplie très-humblement, MONSEIGNEUR, de l'accepter, comme un hommage de ma reconnoissance, & comme une preuve du profond respect avec lequel je suis,

MONSEIGNEUR,

Votre très-humble & très-obéissant
Serviteur CLAIRAUT.



PREFACE.

Quoique la Géométrie soit par elle-même abstraite, il faut avoüer cependant que les difficultés qu'éprouvent ceux qui commencent à s'y appliquer, viennent le plus souvent de la maniére dont elle est enseignée dans les Elémens ordinaires. On y débute toûjours par un grand nombre de définitions, de demandes, d'axiomes, & de principes préliminaires, qui semblent ne promettre rien que de sec

au Lecteur. Les propoſitions qui viennent enſuite ne fixant point l'eſprit ſur des objets plus intéreſſans, & étant d'ailleurs difficiles à concevoir, il arrive communément que les Commençans ſe fatiguent & ſe rebutent, avant que d'avoir aucune idée diſtincte de ce qu'on vouloit leur enſeigner.

Il eſt vrai que pour ſauver cette ſéchereſſe, naturellement attachée à l'étude de la Géométrie, quelques Auteurs ont imaginé de mettre à la ſuite de chaque propoſition eſſentielle, l'uſage qu'on en peut faire pour la pratique; mais par-là ils prouvent l'utilité de la Géométrie, ſans faciliter beaucoup les moyens de l'apprendre. Car chaque propoſition venant

toûjours avant ſon uſage, l'eſprit ne revient à des idées ſenſibles, qu'après avoir eſſuyé la fatigue de ſaiſir des idées abſtraites.

Quelques réflexions que j'ai faites ſur l'origine de la Géométrie, m'ont fait eſpérer d'éviter ces inconvéniens, en réuniſſant les deux avantages d'intéreſſer & d'éclairer les Commençans. J'ai penſé que cette Science, comme toutes les autres, devoit s'être formée par dégrés; que c'étoit vraiſemblablement quelque beſoin qui avoit fait faire les premiers pas, & que ces premiers pas ne pouvoient pas être hors de la portée des Commençans, puiſque c'étoient des Commençans qui les avoient faits.

Prévenu de cette idée, je me

ſuis propoſé de remonter à ce qui pouvoit avoir donné naiſſance à la Géométrie ; & j'ai tâché d'en développer les principes, par une méthode aſſez naturelle, pour être ſuppoſée la même que celle des premiers Inventeurs ; obſervant ſeulement d'éviter toutes les fauſſes tentatives qu'ils ont néceſſairement dû faire.

La meſure des Terrains m'a paru ce qu'il y avoit de plus propre à faire naître les premieres propoſitions de Géométrie ; & c'eſt, en effet, l'origine de cette Science, puiſque Géométrie ſignifie *meſure de Terrain.* Quelques Auteurs prétendent que les Egyptiens, voyant continuellement les bornes de leurs Hérita-

ges détruites par les débordemens du Nil, jettérent les premiers fondemens de la Géométrie, en cherchant les moyens de s'aſſurer exactement de la ſituation de l'étenduë & de la figure de leurs domaines. Mais quand on ne s'en rapporteroit pas à ces Auteurs, du moins ne ſçauroit-on douter que dès les premiers temps, les hommes n'ayent cherché des méthodes pour meſurer & pour partager leurs Terres. Voulant dans la ſuite perfectionner ces méthodes, les recherches particulieres les conduiſirent, peu à peu, à des recherches générales ; & s'étant enfin propoſé de connoître le rapport exact de toutes ſortes de grandeurs, ils formérent une Science

d'un objet beaucoup plus vaſte, que celui qu'ils avoient d'abord embraſſé, & à laquelle ils conſervérent cependant le nom qu'ils lui avoient donné dans ſon origine.

Afin de ſuivre dans cet Ouvrage une route ſemblable à celle des Inventeurs, je m'attache d'abord à faire découvrir aux Commençans les principes dont peut dépendre la ſimple meſure des Terrains, & des diſtances acceſſibles ou inacceſſibles, &c. De-là je paſſe à d'autres recherches qui ont une telle analogie avec les premieres, que la curioſité naturelle à tous les hommes, les porte à s'y arrêter; & juſtifiant enſuite cette curioſité par quelques applications utiles, je parviens à faire parcourir tout ce

que la Géométrie élémentaire a de plus intéreſſant.

On ne ſçauroit diſconvenir, ce me ſemble, que cette méthode ne ſoit au moins propre à encourager ceux qui pourroient être rebutés par la ſécchereſſe des vérités géométriques, dénuées d'applications ; mais j'eſpére qu'elle aura encore une utilité plus importante, c'eſt qu'elle accoutumera l'eſprit à chercher & à découvrir ; car j'évite avec ſoin de donner aucune propoſition ſous la forme de théorémes ; c'eſt-à-dire, de ces propoſitions, où l'on démontre que telle ou telle vérité eſt, ſans faire voir comment on eſt parvenu à la découvrir.

Si les premiers Auteurs de

Mathématiques ont présenté leurs découvertes en théorémes, ç'a été, sans doute, pour donner un air plus merveilleux à leurs productions, ou pour éviter la peine de reprendre la suite des idées qui les avoient conduits dans leurs recherches. Quoi qu'il en soit, il m'a paru beaucoup plus à propos d'occuper continuellement mes Lecteurs à résoudre des problêmes; c'est-à-dire, à chercher les moyens de faire quelque opération, ou de découvrir quelque vérité inconnuë, en déterminant le rapport qui est entre des grandeurs données, & des grandeurs inconnues qu'on se propose de trouver. En suivant cette voie, les Commençans apperçoivent, à chaque

pas qu'on leur fait faire, la raiſon qui détermine l'Inventeur, & par-là ils peuvent acquerir plus facilement l'eſprit d'invention.

On me reprochera peut-être, en quelques endroits de ces Elémens, de m'en rapporter trop au témoignage des yeux, & de ne m'attacher pas aſſez à l'exactitude rigoureuſe des démonſtrations. Je prie ceux qui pourroient me faire un pareil reproche, d'obſerver que je ne paſſe legérement, que ſur des propoſitions dont la vérité ſe découvre pour peu qu'on y faſſe attention. J'en uſe de la ſorte, ſurtout dans les commencemens, où il ſe rencontre plus ſouvent des propoſitions de ce genre, parce que j'ai remarqué que ceux qui

avoient de la diſpoſition à la Géométrie, ſe plaiſoient à exercer un peu leur eſprit; & qu'au contraire, ils ſe rebutoient, lorſqu'on les accabloit de démonſtrations, pour ainſi dire, inutiles.

Qu'Euclide ſe donne la peine de démontrer, que deux cercles qui ſe coupent n'ont pas le même centre, qu'un triangle renfermé dans un autre, a la ſomme de ſes côtés plus petite que celle des côtés du triangle dans lequel il eſt renfermé; on n'en ſera pas ſurpris. Ce Géométre avoit à convaincre des Sophiſtes obſtinés, qui ſe faiſoient gloire de ſe refuſer aux vérités les plus évidentes : il falloit donc qu'alors la Géométrie eût, comme la Logique, le ſecours des

raiſonnemens en forme, pour fermer la bouche à la chicanne. Mais les choſes ont changé de face. Tout raiſonnement qui tombe ſur ce que le bon ſens ſeul décide d'avance, eſt aujourd'hui en pure perte, & n'eſt propre qu'à obſcurcir la vérité, & à dégoûter les Lecteurs.

Un autre reproche qu'on pourroit me faire, ce ſeroit d'avoir omis différentes propoſitions, qui trouvent leur place dans les Elémens ordinaires, & de me contenter, lorſque je traite des propoſitions, d'en donner ſeulement les principes fondamentaux.

A cela je réponds qu'on trouve dans ce Traité tout ce qui peut ſervir à remplir mon projet, que

les propoſitions que je néglige ſont celles qui ne peuvent être d'aucune utilité par elles-mêmes, & qui d'ailleurs ne ſçauroient contribuer à faciliter l'intelligence de celles dont il importe d'être inſtruit : Qu'à l'égard des proportions, ce que j'en dis doit ſuffire pour faire entendre les propoſitions élémentaires qui les ſuppoſent. C'eſt une matiére que je traiterai plus à fond dans les Elémens d'Algébre, que je donnerai dans la ſuite.

Enfin, comme j'ai choiſi la meſure des Terrains pour intéreſſer les Commençans, ne dois-je pas craindre qu'on ne confonde ces Elémens avec les Traités ordinaires d'Arpentage ? Cette penſée ne peut venir qu'à ceux qui ne conſi-

déreront pas que la mesure des Terrains n'est point le véritable objet de ce Livre, mais qu'elle me sert seulement d'occasion pour faire découvrir les principales vérités géométriques. J'aurois pû de même, remonter à ces vérités, en faisant l'Histoire de la Physique, de l'Astronomie, ou de toute autre partie des Mathématiques que j'aurois voulu choisir; mais alors la multitude des idées étrangéres, dont il auroit fallu s'occuper, auroit comme étouffé les idées géométriques, ausquelles seules je devois fixer l'esprit du Lecteur.



Extrait des Regiſtres de l'Académie Royale des Sciences, du 31. Août 1740.

MEſſieurs DE REAUMUR, DE MAIRAN, & NICOLE, qui avoient été nommés pour examiner les *Elémens de Géométrie* de M. CLAIRAUT, en ayant fait leur rapport, la Compagnie a jugé que cet Ouvrage méritoit l'impreſſion. En foi de quoi j'ai ſigné le préſent Certificat. A Paris, ce 14. Décembre 1740.

Signé FONTENELLE, Sécrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences.

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, par la Grace de Dieu, Roi de France & de Navarre: A nos amez & féaux Conſeillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conſeil, Prévôt de Paris, Baillifs, Senéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra, SALUT. Notre ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES, Nous a très-humblement fait expoſer, que depuis qu'il Nous a plû lui donner, par un Réglement nouveau, de nouvelles marques de notre affection, elle s'eſt appliquée avec plus de ſoin, à cultiver les Sciences, qui ſont l'objet de ſes exercices; enſorte qu'outre les Ouvrages qu'elle a déja donnés au Public, elle ſeroit en état d'en produire encore d'autres, s'il Nous plaiſoit lui accorder de nouvelles Lettres de Privilege, attendu que celles que Nous lui avons accordées en date du 6. Avril 1693, n'ayant point eu de terme limité, ont été déclarées nulles par un Arrêt de notre Conſeil d'Etat du 13 Août 1704, celles de 1713 & celles de 1716 étant auſſi expirées: Et déſirant donner à notredite Académie en corps & en particulier, & à chacun de ceux qui la compoſent,

toutes les facilités & les moyens qui peuvent contribuer à rendre leurs travaux utiles au Public, Nous avons permis & permettons par ces presentes à notredite Académie, de faire vendre ou débiter par tous les lieux de notre obéissance, par tel Imprimeur ou Libraire qu'elle voudra choisir, toutes les *Recherches ou Observations journalieres, ou Relations annuelles de tout ce qui aura été fait dans les Assemblées de notredite Académie Roïale des Sciences; comme aussi les Ouvrages, Mémoires, ou Traités de chacun des Particuliers qui la composent, & généralement tout ce que ladite Académie voudra faire paroître, après avoir fait examiner lesdits Ouvrages, & jugé qu'ils sont dignes de l'impression*; & ce, pendant le temps & espace de quinze années consecutives, à compter du jour de la date desdites Presentes. Faisons défenses à toutes sortes de personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéïssance; comme aussi à tous Imprimeurs, Libraires, & autres, d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter, ni contrefaire aucun desdits Ouvrages ci-dessus spécifiés, en tout, ni en partie, ni d'en faire aucuns extraits sous quelque pretexte que ce soit, d'augmentation, correction, changement de titre, feuilles mêmes séparées, ou autrement, sans la permission expresse & par écrit de notredite Académie, ou de ceux qui auront droit d'elle, & ses ayans cause, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de dix mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, l'autre tiers au Dénonciateur, & de tous dépens, dommages & interêts; à la charge que ces Presentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, dans trois mois de la date d'icelle; que l'impression desdits Ouvrages sera faite dans notre Royaume, & non ailleurs; & que notredite Académie se conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725. & qu'avant que de les exposer en vente, les Manuscrits ou Imprimés qui auront servi de

copie à l'impression desdits Ouvrages, seront remis dans le même état, avec les Approbations & certificats qui en auront été donnés, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France, le Sieur Chauvelin; & qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires de chacun dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France, le Sieur Chauvelin: le tout à peine de nullité des Présentes; du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire joüir notredite Académie, ou ceux qui auront droit d'elle & ses ayans-cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement: Voulons que la copie desdites Presentes, qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin desdits Ouvrages, soit tenue pour dûëment signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers & Secretaires, foi soit ajoûtée comme à l'Original: Commandons au premier notre Huissier ou Sergent, de faire pour l'exécution d'icelles tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant Clameur de Haro, Chartre Normande, & Lettres à ce contraires: car tel est notre plaisir. DONNE' à Fontainebleau le douziéme jour du mois de Novembre l'an de grace mil sept cens trente-quatre, & de notre Regne le vingtiéme.

Par le Roi en son Conseil. SAINSON.

Registré sur le Registre VIII. de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 792. Fol. 775. conformément au Réglement de 1723. qui fait défense, Art. IV. à toutes personnes de quelque qualité qu'elles soient, autres que les Libraires & Imprimeurs, de vendre, débiter & faire afficher aucuns Livres, pour les vendre en leur nom, soit qu'ils s'en disent les Auteurs, ou autrement, & à la charge de fournir les Exemplaires prescrits par l'Art. CVIII. du même Réglement. A Paris le 15. Novembre 1734. G. MARTIN, *Syndic.*

ELEMENS



ELEMENS DE GEOMETRIE.

PREMIERE PARTIE.

Des moyens qu'il étoit le plus naturel d'employer pour parvenir à la meſure des Terrains.



CE qu'il ſemble qu'on a dû meſurer d'abord, ce ſont les longueurs & les diſtances.

I.

POUR meſurer une longueur quelconque, l'expédient que fournit une

ſorte de Géometrie naturelle, c'eſt de comparer la longueur d'une meſure connuë à celle de la longueur qu'on veut connoître.

II.

La ligne droite eſt la plus courte d'un point à un autre, & par conſéquent la meſure de la diſtance entre deux points.

A l'égard de la diſtance, on voit que pour meſurer celle qui eſt entre deux points, il faut tirer une ligne droite de l'un à l'autre, & que c'eſt ſur cette ligne qu'il faut porter la meſure connuë, parce que toutes les autres faiſant néceſſairement un détour plus ou moins grand, ſont plus longues que la ligne droite qui n'en fait aucun.

III.

Planche premiere. Fig. 1.

Outre la néceſſité de meſurer la diſtance d'un point à un autre, il arrive ſouvent qu'on eſt encore obligé de meſurer la diſtance d'un point à une ligne. Un homme, par exemple, placé en D ſur le bord d'une riviere, ſe propoſe de ſçavoir combien il y a du lieu

où il eſt à l'autre bord AB. Il eſt clair que, dans ce cas, pour meſurer la diſtance cherchée, il faut prendre la plus courte de toutes les lignes droites DA, DB, &c. qu'on peut tirer du point D à la droite AB. Or cette ligne, la plus courte dont on a beſoin, il eſt aiſé de voir que c'eſt la ligne DC, qu'on ſuppoſe ne pancher ni vers A, ni vers B. C'eſt donc ſur cette ligne, à laquelle on a donné le nom de perpendiculaire, qu'il faut porter la meſure connuë, pour avoir la diſtance DC, du point D, à la droite AB. Mais on voit auſſi que pour poſer cette meſure ſur la ligne DC, il faut que cette ligne ſoit préalablement tirée. Il étoit donc néceſſaire qu'on eût une méthode pour tracer des perpendiculaires.

Une ligne qui tombe ſur une autre, ſans pancher ſur elle d'aucun côté, eſt perpendiculaire à cette ligne.

IV.

On avoit encore beſoin d'en tracer dans une infinité d'autres occaſions. On ſçait, par exemple, que la régu-

FIG. 2. & 3. larité des figures telles que ABCD, FGHI, appellées rectangles, & composées de quatre côtés perpendiculaires les uns aux autres, engage à donner leurs formes aux maisons, à leurs dedans, aux jardins, aux chambres, aux pans de murailles, &c.

Le rectangle est une figure de quatre côtés perpendiculaires les uns aux autres.

La premiére ABCD de ces figures, dont les quatre côtés sont égaux, s'appelle communément quarré. L'autre FGHI, qui n'a que ses côtés opposés égaux, retient le nom de rectangle.

Et le quarré est un rectangle dont les quatre côtés sont égaux.

V.

DANS les différentes opérations qui demandent qu'on méne des perpendiculaires, il s'agit, ou d'en abaisser sur une ligne, d'un point pris au-dehors, ou d'en élever d'un point placé sur la ligne même.

FIG. 4.

Que du point C, pris dans la ligne AB, on veuille élever la ligne CD, perpendiculaire à AB ; il faudra que cette ligne ne panche ni vers A, ni vers B.

Maniere d'élever une perpendiculaire.

Suppoſant donc d'abord que C ſoit à égale diſtance de A & de B, & que la droite CD ne panche d'aucun côté, il eſt clair que chacun des points de cette ligne ſera également éloigné de A & de B; il ne s'agira donc plus que de trouver un point quelconque D, tel que ſa diſtance au point A ſoit égale à ſa diſtance au point B: car alors tirant par C, & par ce point une ligne droite CD, cette ligne ſera la perpendiculaire demandée.

Pour avoir le point D, on pourroit le chercher en tâtonnant; mais le tâtonnement ne ſatisfait pas l'eſprit, il veut une méthode qui l'éclaire. La voici.

Prenez une commune meſure, une corde, par exemple, ou un compas d'une ouverture déterminée, ſuivant que vous travaillerez, ou ſur le terrain, ou ſur le papier.

Cette meſure priſe, vous fixerez au point A, ou l'extrémité de la corde,

ou la pointe du compas, &, faisant tourner l'autre pointe, ou l'autre extrémité de la corde, vous tracerez l'arc PDM. Puis, sans changer de mesure, vous opererez de même par rapport au point B, & vous décrirez l'arc QDN, qui, coupant le premier au point D, donnera le point cherché.

Car puisque le point D appartiendra également aux deux arcs PDM, QDN décrits par le moyen d'une mesure commune, sa distance au point A égalera sa distance au point B. Donc CD ne panchera, ni vers A, ni vers B. Donc cette ligne sera perpendiculaire sur AB.

FIG. 5. Si le point C ne se trouve pas à égale distance de A & de B, il faut prendre deux autres points *a* & *b*, également éloignés de C, & s'en servir, à la place de A & de B, pour décrire les arcs PDM, QDN.

VI.

FIG. 4. SI une des traces, telle que PDM,

étoit continuée en O, en E, en R, &c. jusqu'à ce qu'elle revint au même point P, la trace entiére s'appelleroit circonférence de cercle, ou simplement cercle.

Le cercle est la trace entiere que décrit la pointe mobile d'un compas pendant qu'elle tourne autour de l'autre pointe.

Qu'on ne trace qu'une partie PDM de la circonférence, cette partie sera appellée arc de cercle.

Le point fixe A son centre, ou celui du cercle.

Le centre est le lieu de la pointe fixe.

Et l'intervalle AD, son rayon.

Le rayon est l'intervalle dont le compas est ouvert.

Toute ligne, comme DAE, qui passe par le centre A, & qui se termine à la circonférence, est appellée diamétre; il est évident que cette ligne est double du rayon, ce qui fait que le rayon est quelquefois nommé demi-diamétre.

Le diamétre est le double du rayon.

VII.

FIG. 6.

Maniére d'abaisser une perpendiculaire.

La maniére d'élever une perpendiculaire sur une ligne AB, fournit celle d'en abaisser une d'un point quelconque E, pris hors de cette ligne; car, plaçant en E, ou l'extrémité d'un fil,

ou la pointe du compas, & d'un même intervalle E *b*, marquant deux points *a* & *b* sur la ligne AB, on cherchera, comme dans l'article précédent, un autre point D, dont la distance, au point *a* & au point *b*, soit la même, & par ce point & par E, on menera la droite DE, qui, ayant chacune de ses extrémités également éloignées de *a* & de *b*, & ne panchant pas plus vers l'un de ces points que vers l'autre, sera perpendiculaire sur AB.

VIII.

De l'opération précédente suit la solution d'un nouveau Problême.

Fig. 7.

Couper une ligne en deux parties égales.

Qu'il s'agisse de partager une ligne droite AB en deux parties égales; des points A & B, pris comme centres, & d'une ouverture de compas quelconque, on décrira les arcs REI, GEF, ensuite des mêmes centres, & de la même, ou de telle autre ouverture qu'on voudra, on décrira aussi les arcs

PDM, QDN, alors la ligne ED, qui joindra les points d'interſections E & D, coupera AB en deux parties égales au point C.

IX.

La maniere de tracer des perpendiculaires étant trouvée, rien n'étoit plus aiſé que de s'en ſervir pour faire ces figures qu'on appelle rectangles, & quarrés, dont on a parlé dans l'Article IV. On voit que pour faire un quarré ABCD, dont les côtés ſoient égaux à la ligne donnée K, il faut prendre ſur la droite GE, un intervalle AB, égal à K, puis élever (Article V.) aux points A & B, les perpendiculaires AD, BC, chacune égale à K, enſuite tirer DC.

Fig. 2. Faire un quarré ayant ſon côté.

X.

Si on vouloit tracer un rectangle FGHI, dont la longueur fut K, & la largeur L, on feroit FG égale à K, enſuite on éleveroit les perpendiculai-

Fig. 3. Faire un rectangle, dont la longueur & la largeur ſont données.

res FI & GH, chacune égale à L; puis on tireroit HI.

X I.

Dans la construction des ouvrages, comme remparts, canaux, ruës, &c. on a besoin de mener des lignes paralleles; c'est-à-dire, des lignes dont la position soit telle que leurs intervalles ayent par-tout pour mesure des perpendiculaires de même longueur. Or pour mener ces paralleles, rien, ce semble, n'est plus naturel que de recourir à la méthode dont on se sert pour tracer des rectangles. Que AB, par exemple, soit un des côtés ou de quelque canal, ou de quelque rempart, &c. auquel on voudra donner la largeur CA; ou pour énoncer la question d'une maniére plus géométrique & plus générale, supposons qu'on veuille mener par C, la parallele CD à AB, on prendra, à volonté, un point B dans la ligne AB, & l'on opérera de la même façon que

Les paralleles sont des lignes toûjours également distantes les unes des autres.

FIG. 8.

Mener une parallele à une ligne par un point donné.

si, ayant la base AB, on vouloit faire un rectangle ABCD, qui eût AC pour hauteur. Alors les lignes CD, AB, étant prolongées à l'infini, seroient toûjours paralleles, ou, ce qui revient au même, elles ne se rencontreroient jamais.

XII.

La régularité des figures rectangulaires les faisant souvent employer, comme nous avons déja dit, il se trouve bien des cas où l'on a besoin de connoître leur étenduë. Il s'agira, par exemple, de déterminer combien il faut de tapisserie pour une chambre, ou combien un enclos de maison, ayant la forme d'un rectangle, doit contenir d'arpens, &c.

On sent que pour parvenir à ces sortes de déterminations, le moyen le plus simple & le plus naturel, est de se servir d'une mesure commune, qui, appliquée plusieurs fois sur la surface à

mesurer, la couvre toute entiere. Méthode qui revient à celle dont on s'est déja servi pour déterminer la longueur des lignes.

Or il est évident que la mesure commune des surfaces, doit être elle même une surface, par exemple, celle d'une toise quarrée, d'un pied quarré, &c. Ainsi, mesurer un rectangle, c'est déterminer le nombre de toises quarrées, ou de pieds quarrés, &c. que contient sa surface.

Prenons un exemple, pour soulager l'esprit. Suppoſons que le rectangle donné ABCD, ait 7 pieds de haut sur une base de 8 pieds, on pourra regarder ce rectangle comme partagé en 7 bandes, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, qui contiendront chacune 8 pieds quarrés; la valeur du rectangle sera donc 7 fois 8 pieds quarrés, ou 56 pieds quarrés.

FIG. 9.

Maintenant si on se rappelle les premiers élémens du calcul arithmétique, & qu'on se souvienne que multiplier

deux nombres, c'est prendre l'un autant de fois que l'unité est contenuë dans l'autre ; on trouvera une parfaite analogie entre la multiplication ordinaire, & l'opération par laquelle on mesure le rectangle. On verra qu'en multipliant le nombre des toises, ou des pieds, &c. que donne sa hauteur, par le nombre des toises ou des pieds, &c. que donne sa base, on déterminera la quantité de toises quarrées, ou de pieds quarrés, &c. que contient sa superficie.

La mesure d'un rectangle est le produit de sa hauteur par sa base.

XIII.

Les figures qu'on a à mesurer, ne sont pas toûjours régulieres, comme les rectangles; cependant on a souvent besoin d'avoir leur mesure, tantôt il s'agira de déterminer l'étendue d'un ouvrage construit sur un terrain qui manquera de régularité ; tantôt on voudra sçavoir ce qu'une terre irrégulierement bornée contiendra d'arpens ; il étoit donc nécessaire qu'à la méthode de

déterminer l'étenduë des rectangles ; on ajoûtât celle de mesurer les figures qui ne sont pas rectangulaires.

Les figures rectilignes sont celles que terminent des lignes droites.

FIG. 10.

On voit d'abord, que pour la pratique, la difficulté ne tombe que sur la mesure des figures rectilignes, telles que ABCDE, c'est-à-dire, des figures terminées par des lignes droites ; car que, dans le contour d'un terrain, il se trouve quelques lignes courbes, comme dans la figure ABCDEFG, il est évident que ces lignes, partagées en autant de parties qu'il sera nécessaire pour éviter toute erreur sensible, pourront toûjours être prises pour un assemblage de lignes droites.

FIG. 11.

Le triangle est une figure terminée par trois lignes droites.

Cela posé, on voit que, malgré l'infinie variété des figures rectilignes, on peut les mesurer toutes de la même façon, en les partageant en figures de trois côtés nommées communément triangles ; ce qu'on fera de la maniére la plus simple & la plus commode, si, d'un point quelconque A du contour

de la figure ABCDE, on méne les lignes droites AC, AD, &c. aux points C, D, &c. FIG. 10.

XIV.

IL ne s'agira donc plus que d'avoir la mesure des triangles qu'on aura formés. Or on sçait que pour trouver ce qu'on ignore, le moyen le plus sûr est de chercher si dans ce qu'on connoît, rien ne se rapporteroit à ce qu'on veut connoître; mais on a déja vû que tout rectangle ABCD, est égal au produit FIG. 12. de sa base AB par sa hauteur CB. D'ailleurs, il est aisé de s'appercevoir que cette figure coupée transversalement par la ligne AC, nommée diagonale, se trouve partagée en deux triangles égaux, & de-là on infére que chacun de ces triangles égalera la moitié du produit de leur base AB ou DC, par leur hauteur CB ou DA.

La Diagonale d'un rectangle est la ligne qui le partage en deux triangles égaux.

Il est vrai qu'il n'arrive guéres que les triangles à mesurer, ayent deux de

Les triangles rectangles sont ceux qui ont deux de leurs côtés perpendiculaires l'un à l'autre.

leurs côtés perpendiculaires l'un à l'autre, comme les triangles ABC, ADC, qu'on appelle triangles rectangles; mais rien n'empêche qu'on ne les réduise tous à des triangles de cette espéce.

Pl. II. Fig. 1.

Car que du point A, sommet d'un triangle quelconque ABC, on abaisse la perpendiculaire AD, sur la base BC, le triangle ABC se trouvera partagé en deux triangles rectangles ABD, ADC.

Un triangle est la moitié du rectangle qui a même base, & même hauteur.

Reprenant donc ce qui vient d'être dit, il est évident que comme les deux triangles ABD, ADC seront les moitiés des rectangles AEBD, ADCF, le triangle proposé ABC, sera, de même, la moitié du rectangle EBCF, qui aura BC pour base, & AD pour hauteur: mais puisque la surface du rectangle EBCF égalera le produit de la hauteur EB ou AD par la base BC, le triangle ABC aura pour mesure la moitié du produit de la base BC par la perpendiculaire AD, hauteur du triangle.

Donc sa mesure est la moitié du produit de sa hauteur par sa base.

On a donc la maniére de mesurer tous

tous les terrains terminés par des lignes droites, puiſqu'il ne s'en trouve aucun qu'on ne puiſſe réduire à des triangles, & que des ſommets de ces triangles, on ſçait abaiſſer des perpendiculaires ſur leurs baſes.

XV.

De ce que dans la méthode que nous venons de donner, pour meſurer l'aire, ou la ſuperficie des triangles, on n'employe que leur baſe & leur hauteur, ſans égard à la longueur de leurs côtés, on tire cette propoſition, ou ce théorême, que tous les triangles, tels que ECB, ACB, qui ont une baſe commune CB, & dont les hauteurs EF, AD, ſont égales, ont la même ſuperficie.

Fig. 2.

Les triangles qui ont même hauteur & même baſe, ont des ſuperficies égales.

XVI.

Pour faciliter l'intelligence du principe qui donne la meſure des triangles, nous avons crû ne devoir

choisir pour base qu'un côté sur lequel pourroit tomber la perpendiculaire abaissée du sommet opposé, ce qu'on a toûjours la liberté de faire, quand il ne s'agit que de la mesure des terrains. Mais parce que dans la comparaison des triangles qui ont même base, les perpendiculaires abaissées de leurs sommets peuvent tomber hors du triangle, comme dans la figure 3. il semble qu'il soit nécessaire de voir si les triangles,
FIG. 3. tels que BCG sont dans le cas des autres ; c'est-à-dire, s'ils sont toûjours moitiés des rectangles ECBF, qui ont la perpendiculaire GH pour hauteur.

Mais c'est de quoi il est aisé de s'assurer, en remarquant que le triangle CGH, somme des deux triangles CGB, GBH, est la moitié du rectangle ECHG, somme des deux rectangles ECBF, FBHG, & qu'ainsi les deux triangles CGB, GBH, pris ensemble, valent la moitié du rectangle ECHG: or le triangle GBH, est la moitié du

rectangle FBHG ; donc le triangle proposé BCG, est la moitié de de l'autre rectangle ECBF, qui a BC pour base, & GH pour hauteur.

XVII.

La proposition démontrée dans les trois articles précédens, peut encore s'énoncer généralement en ces termes : les triangles EBC, ABC, GBC, sont égaux, lorsqu'ils ont une base commune BC, & qu'ils sont entre les mêmes paralleles EAG, CBH ; c'est-à-dire, lorsque leurs sommets E, A, G, se trouvent dans une même ligne droite EAG, parallele à la droite CB. Car alors (Article XI.) leurs hauteurs, mésurées par les perpendiculaires EF, AD, GH, sont les mêmes.

Fig. 4.

Les triangles qui ont même base, & qui sont renfermés entre les mêmes paralleles, sont égaux en superficie.

XVIII.

Entre les différentes figures rectilignes qu'on sçait mesurer par la méthode précédente, il y en a qui approchent

de la regularité des rectangles, ce sont des espaces tels que ABCD, terminés par quatre côtés, dont chacun est parallele au côté qui lui est opposé. Ces figures sont appellées Parallelogrammes; elles sont plus aisées à mesurer que les autres figures rectilignes, les rectangles exceptés. Car qu'on partage le parallelogramme ABCD, en deux triangles ABC, ACD, ces deux triangles seront visiblement égaux: or comme chacun de ces triangles vaudroit la moitié du produit de la hauteur AF, par la base BC, le parallelogramme aura pour mesure le produit entier de la base BC par la hauteur AF.

FIG. 5.

Les Parallelogrammes sont des figures de quatre côtés, dont les deux opposés sont paralleles.

On les mesure en multipliant leur hauteur par leur base.

XIX.

DE-là il suit, que tous les parallelogrammes ABCD, EBCF, qui auront une base commune, & qui se trouveront entre les mêmes paralleles, seront égaux; ce qu'il est aisé de voir, même indépendamment de ce qui précéde,

FIG. 6. ou 7.

Les Parallelogrammes qui ont une base commune, & qui sont entre les mêmes paralleles, sont égaux en superficie.

en remarquant que le parallelogramme ABCD deviendra le parallelogramme EBCF ; si on lui ajoûte le triangle DCF, & que, de la figure entiere ABCF, on retranche le triangle ABE ; qu'ainsi les deux triangles DCF, ABE, supposés égaux, il sera évident que le parallelogramme ABCD n'aura point changé d'étendue en devenant EBCF. Or, pour s'assurer de l'égalité de ces deux triangles, il suffira d'observer que AB & CD étant paralleles, aussi-bien que BE & CF, le triangle ABE ne sera autre chose que le triangle DCF, qui aura glissé sur sa base, de maniere que le point A sera arrivé en D, & E en F.

X X.

Il y a encore d'autres figures rectilignes qu'il est aisé de mesurer, & qu'on nomme Poligones reguliers, figures que terminent des côtés égaux, qui ont tous la même inclinaison les uns

Les Poligones reguliers sont des figures que terminent des côtés égaux, & également

Inclinés les uns sur les autres. sur les autres. Telles sont les figures ABDEF, ABDEFG, ABDEFGH *.

* FIG. 8, 9, & 10.

Comme on a coutume de donner la forme symétrique de ces figures, aux bassins, aux fontaines, aux places publiques, &c. je crois qu'avant que d'apprendre à les mesurer, il faut voir de quelle maniére on les trace.

XXI.

Maniere de décrire un Poligone d'un nombre déterminé de côtés.

QU'ON décrive une circonférence de cercle, qu'on la partage en autant de parties égales qu'on voudra donner de côtés au poligone ; qu'ensuite on méne les lignes AB, BD, DE, &c. par les points A,B,D,E, &c. qui partageront la circonférence, on aura le poligone cherché, qu'on nommera, ou pentagone, ou exagone, ou eptagone, ou octogone, ou enneagone, ou décagone, &c. suivant qu'il aura, ou cinq, ou six, ou sept, ou huit, ou neuf, ou dix, &c. côtés.

Le Pentagone a 5. côtés, l'Exagone 6, l'Eptagone 7, l'Octogone 8, l'Enneagone 9, le Decagone 10, &c.

XXII.

Mesure de la surface d'un Poligone régulier.

Pour avoir la mesure d'un poligone regulier, on pourroit employer la méthode qu'on a déja donnée (Article XIII.) pour toutes les figures rectilignes ; mais on s'apperçoit aisément que le plus court est de partager le polygone en triangles égaux, qui ayent tous le centre C pour sommet. Car prenant un de ces triangles, CBD par exemple, & tirant sur la base BD, la perpendiculaire CK, qui, pour lors sera nommée l'apothéme du polygone, comme l'aire du triangle vaudra le produit de la base BD, par la moitié de CK, ce produit, pris autant de fois que le polygone aura de côtés, donnera l'aire de la figure entiere.

Fig. 10.

L'apothéme est la perpendiculaire abaissée du centre de la figure sur un de ses côtés.

XXIII.

Qu'on ne partageât la circonférence du cercle qu'en trois parties égales, on formeroit un triangle nommé

Le triangle équilateral est celui dont les trois côtés sont égaux.

communément Triangle équilateral ; qu'on partageât cette circonférence en quatre parties égales, on formeroit un quarré ; mais ces deux figures, les plus simples de tous les polygones, peuvent aisément se tracer, sans qu'il soit nécessaire d'avoir recours à la division du cercle ; c'est ce qu'on a déja vû (Art. IX.) pour le quarré. A l'égard du triangle équilatéral, il est aisé de s'appercevoir que pour le décrire sur une base donnée AB, il faut que des points A & B, comme centres, & d'une ouverture de compas égale à AB, on trace les arcs DCF & GCH, qu'ensuite des points A & B on méne les lignes AC, BC, au point C, section commune des deux arcs DCF, GCH, & sommet du triangle.

Maniere de le décrire.

Fig. 11.

XXIV.

A la méthode de décrire géométriquement le triangle équilatéral & le quarré, les premiers de tous les polygones, je pourrois joindre celle de tra-

cer géométriquement un pentagone, comme plusieurs Auteurs l'ont fait dans les Elémens qu'ils nous ont donnés; mais parce que les Commençans, pour qui seuls nous travaillons ici, n'appercevroient qu'avec peine la route qu'a dû suivre l'esprit, en cherchant la maniere de tracer cette figure; route que l'Algébre nous met à portée de découvrir, nous nous croyons obligés de renvoyer la description du pentagone au Traité qui suivra celui-ci, & dans lequel on joindra cette description à celle de tous les autres polygones qui auront un plus grand nombre de côtés, & qui, sans le secours de l'Algébre, ne pourroient être décrits géométriquement.

Des polygones qui ont plus de cinq côtés, & que je dis ne pouvoir être décrits que par le moyen du calcul algébrique, il en faut excepter ceux de 6, de 12, de 24, de 48, &c. côtés, & ceux de 8, de 16, de 32, de 64, &c. côtés, qu'on peut aisément décrire par

les méthodes que fournit la Géométrie élémentaire, comme on le verra à la fin de cette premiere Partie.

XXV.

Je reviens à la mesure des Terrains; & je vois que ceux qu'on veut mesurer, sont souvent tels qu'ils se refusent aux opérations que prescrivent les méthodes précédentes.

Fig. 12. Je suppose que ABCDE soit la figure d'un champ, d'un enclos, &c. dont on voudra avoir la mesure. Suivant ce qu'on a vû, il faudroit partager ABCDE en triangles tels que ABC, ACD, ADE; ensuite mesurer ces triangles, après avoir abaissé les perpendiculaires EF, CH, BG: mais que dans l'espace ABCDE, il se trouve quelque obstacle, une élevation par exemple, un bois, un étang, &c. qui empêche qu'on ne méne les lignes dont on aura besoin, que faudra-t-il faire alors? quelle méthode faudra-t-il suivre

pour remédier à l'inconvénient du terrain? Celle qui se présente d'abord à l'esprit, c'est de choisir quelque terrain plat, sur lequel on puisse aisément opérer, & de décrire sur ce terrain des triangles égaux, & semblables aux triangles ABC, ACD, &c. Voyons comment on s'y prendra, pour former les nouveaux triangles.

XXVI.

Commençons par supposer que l'obstacle se trouve dans l'intérieur du triangle ABC, dont les côtés seront connus, & qu'on veuille tracer un triangle égal & semblable sur le terrain choisi; d'abord on décrira une ligne DE égale au côté AB, ensuite prenant une corde de la longueur BC, & fixant une de ses extrémités en E, on décrira l'arc IFG, qui aura la corde pour rayon; & par le moyen d'une autre corde, prise égale à AC, & dont on attachera pareillement un des bouts

Pl. III. Fig. I.

Connoissant les trois côtés d'un triangle, faire un autre triangle qui lui soit égal.

Fig. I. & 2.

en D, on tracera l'arc KFH, qui coupera le premier au point F; alors menant les lignes D F & FE, on aura un triangle DEF, égal & semblable au triangle proposé ABC; ce qui est évident: car les côtés DF & EF, qui s'uniront au point F, étant respectivement égaux aux côtés AC & BC, unis au point C, & la base DE ayant été prise égale à AB, il ne seroit pas possible que la position des lignes DF & EF sur DE, fût différente de la position des lignes AC & BC sur AB. Il est vrai qu'on pourroit prendre les lignes D*f*, E*f*, au dessous de DE; mais le triangle se retrouveroit encore le même, il seroit simplement renversé.

XXVII.

Si on ne pouvoit mesurer que deux des trois côtés du triangle ABC, les deux côtés AB, BC, par exemple; il est clair qu'avec cela seul, on ne pour-

Fig. 3.

roit pas déterminer un second triangle égal & semblable à ABC. Car quoiqu'on eût pris DE, égal à BC, & DF, égal à BA, on ne sçauroit quelle position donner à celle-ci, relativement à l'autre. Pour lever cette difficulté, la ressource qui se présente est simple : on fait pancher DF, de la même maniere sur DE, que AB panche sur BC ; ou, pour s'exprimer comme les Géométres, on donne à l'angle FDE la même ouverture qu'à l'angle ABC.

Fig. 3. & 4.

Un angle est l'inclinaison d'une ligne sur une autre.

XXVIII.

Pour faire cette opération, on prend un instrument tel que *a b c*, composé de deux régles qui puissent tourner autour de *b*, & l'on pose ces régles sur les côtés AB, & BC. Par-là elles font entr'elles le même angle que les côtés AB & BC. Plaçant donc la régle *b c* sur la base DE, de maniere que le centre *b* réponde au point D, & que

Maniere de faire un angle égal à un autre.

l'ouverture de l'inſtrument reſte toûjours la même, la régle *a b* donnera la poſition de la ligne DF, qui ſera, avec la ligne DE, l'angle FDE, égal à l'angle ABC. Or la ligne DF aura été priſe de même longueur que BA. Donc il ne s'agira plus que de mener par F & par E la droite FE, pour avoir le triangle FED entiérement égal, & ſemblable au triangle ABC. Pratique ſimple, qui ſuppoſe ce principe évident, qu'un triangle eſt déterminé par la longueur de deux de ſes côtés, & par leur ouverture; ou, ce qui revient au même, qu'un triangle eſt égal à un autre, lorſque deux de leurs côtés ſont reſpectivement égaux, & que l'angle compris entre ces côtés eſt également ouvert.

Deux côtés, & l'angle compris, étant donnés, le triangles eſt déterminé.

XXIX.

FIG. 5. & 6.

On pourroit encore faire l'angle FDE égal à l'angle ABC, de la maniere ſuivante.

Du centre B, & d'un intervalle quelconque B *a*, décrivez un arc *a b c*; ensuite du centre D, & du même intervalle, tracez l'arc *e i f*; alors vous n'aurez plus qu'à chercher un point *f*, qui soit placé sur l'arc *e i f* de la même maniére que *a*, se trouvera placé sur l'arc *c b a*. Or vous trouverez facilement le point *f*, en vous servant de la droite *a c*, qui, suivant la définition ordinaire, se nommera la corde de l'arc *a b c*.

Seconde maniére de faire un angle égal à un autre.

La corde d'un arc de cercle, est la droite que terminent les deux extrémités de l'arc.

Car si, du centre *e*, & d'un intervalle égal à *a c*, vous décrivez l'arc *l f k*, l'intersection des deux arcs *e i f*, *l f k*, vous donnera le point cherché *f*.

Tirez ensuite par D & par *f*, la ligne D*f*F, vous aurez l'angle FDE égal à l'angle ABC. Ce qui est évident (Article XXVI.) puisque les triangles B *a c*, D *f e*, seront entierement égaux, & semblables dans toutes leurs parties.

XXX.

Lorsqu'on veut faire le triangle

Fig.3. & 4. FDE égal au triangle ABC, s'il arrive qu'on ne puisse mesurer qu'un des côtés, BC par exemple, on a recours aux angles ABC & ACB. Ayant fait DE égal à BC, on place les lignes FD & FE, de maniére qu'elles fassent, avec DE, les mêmes angles que AB & AC font avec BC : alors, par la rencontre de ces lignes, on a le triangle FDE égal & semblable au triangle ABC. Le principe que suppose cette opération, est de lui-même si simple, qu'il n'a pas besoin d'être démontré.

Deux angles & un côté déterminent le triangle.

XXXI.

Fig. 7. Si des trois côtés du triangle ABC, on ne pouvoit mesurer que la base BC, & qu'on sçût d'ailleurs que ce triangle fût isocéle ; c'est-à-dire, que les deux côtés AB & AC, fussent égaux : il est évident qu'il suffiroit de mesurer un des deux angles ABC, ACB ; car alors l'autre lui seroit égal.

Le triangle isocéle est celui qui a deux côtés égaux.

On en voit aisément la raison, si on se

ſe repréſente ce qui arriveroit, en ſuppoſant que les deux côtés AB, AC, du triangle ABC, fuſſent d'abord couchés ſur BD, & ſur CE, prolongemens de la baſe BC, & qu'enſuite on les relevât pour réunir leurs extrémités au point A; car alors l'égalité de ces deux côtés les empêcheroit de faire plus de chemin l'un que l'autre. Donc étant joints, ils pancheroient également ſur la baſe BC. Donc l'angle ABC ſeroit égal à l'angle ACB.

Les angles que ces côtés font avec la baſe, ſont égaux entr'eux.

XXXII.

POUR revenir à la meſure des Terrains, on verra que quels que ſoient les obſtacles qu'on pourra rencontrer dans leur intérieur, il ſera aiſé, par la méthode précédente, de tranſporter ſur un terrain libre, tous les triangles qui partageront l'eſpace qu'on voudra meſurer.

Suppoſons, par exemple, que vous vouluſſiez meſurer un bois, dont la figure fût ABCDEFG.

FIG. 8.

G

D'abord vous prendriez un triangle égal à ABC, ce que vous pourriez faire ſans entrer dans l'interieur de ce triangle, en meſurant les deux côtés AB, BC, & l'angle compris CBA.

Ce triangle décrit donneroit l'angle BCA, & la longueur de AC, & comme vous pourriez meſurer le côté extérieur DC, vous auriez dans le triangle CAD, les côtés DC, & CA. Quant à l'angle DCA, vous le trouveriez en

Fig. 8. & 9. prenant d'abord l'angle IKL, égal à l'angle DCB, enſuite l'angle LKO, égal à l'angle BCA, ce qui vous donneroit l'angle reſtant IKO, égal à l'angle cherché DCA.

Le triangle ADC, ainſi déterminé par les deux côtés DC & CA, & par l'angle compris DCA, vous connoîtriez de même le triangle DAG, & le reſte de la figure.

XXXIII.

La méthode qu'on vient de donner

pour meſurer les terrains, dans leſquels on ne ſçauroit tirer de lignes, fait ſouvent naître de grandes difficultés dans la pratique. On trouve rarement un eſpace uni & libre, aſſez grand pour faire des triangles égaux à ceux du terrain dont on cherche la meſure. Et même quand on en trouveroit, la grande longueur des côtés des triangles, pourroit rendre les opérations très-difficiles : abaiſſer une perpendiculaire ſur une ligne d'un point qui en eſt éloigné ſeulement de 500 toiſes, ce ſeroit un ouvrage extrêmement pénible, & peut-être impraticable. Il importe donc d'avoir un moyen qui ſupplée à ces grandes opérations.

Ce moyen s'offre comme de lui-même. Il vient bientôt dans l'eſprit de repréſenter la figure à meſurer ABCDE, par une figure ſemblable *abcde*, mais plus petite, dans laquelle, par exemple, le côté *ab* ſoit de 100 pouces, ſi le côté AB eſt de 100 toiſes, le côté

PL. IV. FIG. 1. & 2.

b c de 45 pouces, si BC est de 45 toises, & de conclure ensuite que si l'étendue de la figure réduite *a b c d e*, est de 60000 pouces quarrés, celle de la figure ABCDE doit être de 60000 toises quarrées.

Mais, avant toutes choses, il faut sçavoir en quoi consiste la ressemblance de deux figures.

XXXIV.

En quoi consiste la ressemblance de deux figures.

Or pour peu qu'on y réfléchisse, on reconnoîtra bientôt que deux figures ABCDE, *abcde*, pour être semblables, doivent être telles que les angles A, B, C, D, E, de la grande, soient égaux aux angles *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, de la petite, & que, de plus, les côtés *ab*, *bc*, *cd*, &c. de la petite, contiennent autant de parties *p*, que les côtés AB, BC, CD., &c. de la grande, contiennent de parties P.

XXXV.

POUR exprimer cette ſeconde condition, les Géométres diſent, qu'il faut que les côtés AB, BC, CD, &c. ſoient proportionnels aux côtés *ab*, *bc*, *cd*, &c.; ou que le côté AB contienne *ab*, de la même maniere que BC contient *bc*, &c.; ou que le côté AB ſoit auſſi grand, par rapport à *ab*, que BC l'eſt par rapport à *bc*, &c.; ou encore, qu'il y ait même raiſon, ou même rapport entre AB & *ab*, qu'entre BC & *bc*, &c.; ou enfin, que AB ſoit à *ab*, comme BC à *bc*, &c. Toutes façons d'exprimer la même choſe, mais qu'il faut ſe rendre familiéres, pour entendre le langage des Géométres.

XXXVI.

APRE'S avoir vû en quoi conſiſte la reſſemblance de deux figures, cherchons quelle voie la Nature nous indique pour tracer une figure ſemblable à

Maniére de faire une figure ſemblable à une autre.

une autre. Pour cela, repréſentons-nous un Deſſinateur, qui veut copier une figure en la réduiſant.

D'abord prenant *ab*, pour repreſenter la baſe AB de la figure à copier ABCDE, il incline ſur *ab* les côtés *ae* & *bc*, de la même façon que AE & BC ſont inclinés ſur AB, en obſervant que les longueurs de *ae* & de *bc*, ſoient à celle de *ab*, comme les longueurs de AE & de BC ſont à celle de AB; c'eſt-à-dire, que ſi AE, par exemple, eſt la moitié de AB, il fait *ae* égal à la moitié de *ab*, & qu'il en uſe de même pour déterminer la longueur de *bc*, relativement à BC.

Ayant ainſi déterminé les points *e* & *c*, il trace deux lignes *ed* & *cd*, qu'il incline ſur *ea* & ſur *cb*, de la même maniére que ED & CD ſont inclinés ſur EA & ſur CB, & prolongeant ces lignes juſqu'à ce qu'elles ſe rencontrent en *d*, il acheve ſa figure *abcde*.

XXXVII.

QU'ON réfléchiſſe préſentement ſur cette conſtruction, on verra qu'elle n'eſt appuyée que ſur l'égalité qui eſt entre les angles E, A, B, C, & *e*, *a*, *b*, *c*, & ſur la proportionalité des côtés EA, AB, BC, & des côtés *ea*, *ab*, *bc*; qu'ainſi la figure ſe trouve finie, ſans qu'on ait pris l'angle *d*, égal à l'angle D, ni les côtés *ed*, *cd*, proportionnels aux côtés ED, CD; réflexion, qui d'abord pourroit faire craindre que l'angle *d* ne fût effectivement pas égal à l'angle D, ni les côtés *ed*, *cd*, proportionnels aux côtés ED, CD, & que, par conſéquent, la figure *abcde* ne ſe trouvât pas entiérement ſemblable à la figure ABCDE; mais n'eût-on que l'expérience pour ſe raſſurer, ce doute ſe diſſiperoit bientôt; outre que pour peu d'attention qu'on y faſſe, on ſent que de l'égalité reſpective des quatre angles E, A, B, C, & *e*, *a*, *b*, *c*, & de la

proportionalité des trois côtés EA, AB, BC, & *ca*, *ab*, *bc*, résulte néceſſairement l'égalité des angles D, *d*, & la proportionnalité des côtés ED, CD, & *ed*, *cd*.

Cependant, pour écarter tout ſoupçon, faiſons voir que toutes les conditions que demande la reſſemblance de deux figures, ſont néceſſairement dépendantes les unes des autres ; ce qui nous ſera aiſé de faire, en examinant d'abord les triangles, qui ſont les figures les plus ſimples, & qui entrent néceſſairement dans la compoſition de toutes les autres ; examen qui nous conduira à toutes les propriétés & à tous les uſages des figures ſemblables.

XXXVIII.

Fig. 3. & 4.

Si deux angles d'un triangle ſont égaux à deux angles d'un autre triangle, le troi-

SUPPOSONS que ſur la baſe *ab* on trace le triangle *abc*, en ne prenant que les angles *cab*, *cba*, égaux aux angles CAB, CBA, du triangle ABC, on s'aſſurera premierement que le troiſiéme an-

gle *acb* égalera le troiſiéme angle ACB. Car ſoit poſé le triangle *abc* ſur le triangle ABC, de maniére que le point *a* ſe trouve ſur le point A, *ab* ſur AB, *ac* ſur AC; il eſt clair que *cb* ſera parallele à CB, & cela parce que le côté *cb* prolongé, ne pourroit rencontrer le côté CB, que les deux lignes ne penchaſſent inégalement ſur AB, & que, par conſéquent, les angles *cba* & CBA fuſſent inégaux; ce qui ſeroit contre la ſuppoſition.

ſiéme angle de l'un égalera le troiſiéme angle de l'autre.

Comme, de l'égalité des angles *cba* & CBA, il ſuivra que les lignes *cb*, CB, ſeront paralleles, du paralleliſme de ces lignes, il ſuivra auſſi que les angles A*cb*, ACB, ſeront égaux; ce qu'il s'agiſſoit de prouver.

XXXIX.

MAINTENANT faiſons voir que les côtés qui ſe répondent dans deux triangles *acb* & ACB, qui ont les mêmes angles, ſont proportionnels.

Deux triangles, dont les angles ſont reſpectivement égaux, ont leurs côtés proportionnels.

Pour fixer nos idées, ſuppoſons d'abord que *ab* ſoit la moitié de AB; il faudra que nous prouvions que *ac* ſera auſſi la moitié de AC, & *bc* la moitié de BC. Que *acb*, ainſi que dans l'Article précédent, ait encore la poſition A*cb*, ſi on méne *cg*, parallelle à AB, il eſt clair que cette ligne égalera *b*B, ou A*b*, & que gB égalera de même *cb*. Or comme les angles *cg*C & C*cg*, ſeront manifeſtement égaux aux angles *cb*A, & *c*A*b*, le triangle C*cg*, égalera le triangle *c*A*b*, (Article XXX.) Donc on aura C*c* égal à A*c*, & C*g* égal à *cb*, ou à *g*B. Donc A*c* ou *ac* ſera moitié de de AC, & *cb* moitié de CB.

Fig. 3. & 5. Si *ab* étoit contenu trois, quatre, ou tel autre nombre de fois qu'on voudroit, dans AB, il ſeroit également aiſé de démontrer que *ac* ſeroit contenu le même nombre de fois dans AC, & *cb* dans CB. Car des points de diviſion *b*, *f*, de la baſe AB, menant *bc*, *fh*, &c. paralleles à BC, on pourroit

placer le long de AC, trois, quatre, &c. triangles A*cb*, *chg*, *h*C*i*, &c. égaux au triangle *acb*.

Mais que *ab*, au lieu d'être contenu exactement un certain nombre de fois dans AB, n'y fût contenu qu'avec quelque fraction, deux fois & demie, par exemple, on prouveroit que *ac* seroit aussi contenu deux fois & demie dans AC, & *bc* deux fois & demie dans BC. Fig. 3. & 6.

Car, quand par le moyen des paralleles *bc*, *fh*, on auroit placé le long de AC, les deux triangles A*cb*, *chg*, égaux à *acb*, il resteroit entre les deux paralleles *hf* & CB, de quoi placer un triangle C*hi*, dont les côtés seroient moitiés des côtés de *c*A*b*; ce qui est évident, puisque par la supposition, *f*B seroit la moitié de A*b*, & que la base *hi* du triangle C*hi* égaleroit *f*B, à cause des paralleles *hf*, CB. Donc, en général, lorsque deux triangles ABC, *abc*, ont les mêmes angles, ces triangles, nommés triangles semblables, ont leurs

côtés proportionnels, ou, ce qui revient absolument au même, les côtés AB, BC, AC, de l'un de ces triangles ABC, contiennent le même nombre de parties P, que les côtés *ab*, *bc*, *ac*, de l'autre triangle *abc*, contiennent de parties *p*. P étant le pied, la toise, &c. ou, en général, l'échelle avec laquelle ABC, a été construit, & *p* celle dont on s'est servi en construisant *abc*.

X L.

De la proposition que nous venons de démontrer, se tire naturellement la solution d'un problême souvent utile dans la pratique.

Diviser une ligne en tant de parties égales qu'on voudra.

On demande qu'une ligne soit divisée en un nombre donné de parties égales; ce qui se pourroit faire, à la vérité, en tâtonnant; mais jamais avec cette sûreté que donne l'exactitude géométrique.

Fig. 5.

Supposons, par exemple, qu'on ait à diviser AB en trois parties égales, on

commence par tirer une ligne indéfinie AC, qui faſſe un angle quelconque avec AB, enſuite on porte ſur cette ligne trois parties égales A*c*, *cb*, *b*C, d'une ouverture de compas priſe à volonté, puis on tire CB, & l'on méne à cette droite les paralleles *cb*, *hf*; par-là, AB, coupée aux points *b* & *f*, ſe trouve partagée en trois parties égales; ce qui eſt clair par l'Article précédent.

XLI.

Ce que c'eſt qu'une ligne quatriéme proportionnelle à trois autres, & comment on la trouve.

FIG. 6.

Si on vouloit diviſer une ligne en un nombre fractionnaire de parties, comme deux & demie, trois & un quart, &c. ou bien, qu'on ſe proposât en général, de diviſer la ligne AB au point *b*, en ſorte que AB fût à A*b*, comme la ligne NO à la ligne MQ; on voit encore, que la ſolution du problême dépendroit de l'Art. XXXIX; c'eſt-à-dire, qu'il faudroit tirer par A une droite quelconque, prendre ſur cette droite A*c* & AC, égales à MQ,

& à NO, & ensuite mener *cb*, parallele à CB ; alors le point *b* seroit le point cherché.

Les Géometres énoncent de cette autre maniere le problême que nous venons de résoudre. Trouver à trois lignes NO, MQ, AB, une quatriéme proportionnelle.

XLII.

Fig. 7. & 8.

Les hauteurs des triangles semblables, sont proportionnelles à leurs côtés.

Il est évident que deux triangles semblables ABC, *abc*, auront, non-seulement leurs côtés proportionnels, mais que les perpendiculaires CF, *cf*, qu'on abaissera des sommets C, *c*, sur les bases AB, *ab*, suivront encore la proportion des côtés : ce qui est si aisé à démontrer par ce qui précéde, que nous négligerons de nous y arrêter.

XLIII.

Quant à l'aire des triangles semblables ABC, *abc*, on voit que celle du premier contiendra autant

de quarrés X faits sur la mesure P, que l'aire du second, contiendra de quarrés *x*, faits sur la mesure *p*. Car comme CF & AB, auront, par l'Article précédent, autant de parties P, que *cf* & *ab*, auront de parties *p*; la moitié du produit de CF par AB, mesure de ABC ; (Article XIV.) donnera le même nombre que celui qui résultera de la moitié du produit de *cf* par *ab*, mesure de *abc* ; mais avec cette différence, que CF & AB, se comptant en parties P, leur produit se comptera en quarrés X, & que *cf* & *ab*, qui se compteront en parties *p*, donneront un produit qui se comptera en quarrés *x*.

XLIV.

Ce que nous venons de dire sur la mesure des triangles semblables, sert de preuve à une proposition, qui, dans les Elemens de Géometrie, s'énonce ordinairement ainsi. Les triangles semblables ABC, *abc*, sont entr'eux

Les aires des triangles semblables,

comme les quarrés ABDE, *abde*, de leurs côtés homologues ou correſpondans AB, *ab*.

les comme les quarrés des côtés homologues.

La démonſtration que renferme l'Article précédent, méne abſolument à cette conſéquence ; car le quarré ABDE, contenant autant de X que *abde* contient de *x*, il eſt évident que les deux nombres de quarrés X, qui expriment le rapport du triangle ABC au quarré ABDE, ſont les mêmes que les nombres de quarrés *x*, qui donnent le rapport du triangle *abc*, au quarré *abde* ; ou, ce qui revient au même, que le triangle ABC eſt au quarré ABDE, comme le triangle *abc* au quarré *abde*.

De-là il ſuit que ſi, par exemple, le côté AB étoit double du côté *ab*, le triangle ACB ſeroit quadruple du triangle *acb* ; que ſi AB étoit triple de *ab*, le triangle ACB ſeroit neuf fois plus grand que le triangle *acb*, &c ; car AB ne peut être double de *ab*, que le quarré ABDE

ABDE ne ſoit que quadruple du quarré *abde*, &c.

XLV.

Fig. 1. & 2. même Planche.

Propriétés des figures ſemblables, tirées de celles des triangles.

Pour paſſer préſentement des triangles aux autres figures, ſuppoſons qu'à chacun des triangles ſemblables ABD, *abd*, on joigne deux autres triangles ADE & BDC, *ade* & *bdc*, les deux premiers ſemblables aux deux autres; on verra que dans les figures totales ABCDE, *abcde*,

1°. Les angles A, B, C, D, E, ſeront les mêmes que les angles *a*, *b*, *c*, *d*, *e*; ce qui eſt clair, puiſque les uns & les autres ſeront, ou des angles correſpondans de triangles ſemblables, ou des angles compoſés de ces angles correſpondans.

2°. On verra que le rapport des côtés homologues ou correſpondans DE, *de*, BC, *bc*, &c. des figures ABCDE, *abcde*, ſera néceſſairement le même, c'eſt-à-dire, que ſi P, par exemple, ſe trouve un certain nombre de fois dans

la base AB, & que *p* se trouve le même nombre de fois dans *ab*, P & *p* seront aussi contenus un même nombre de fois dans deux côtés homologues quelconques DE & *de*; car à cause de la ressemblance des triangles ABD, *abd*, la quantité de P que renfermera AD, égalera la quantité de *p* renfermée dans *ad*; alors regardant ces côtés comme les bases des triangles semblables ADE, *ade*, le nombre de parties P contenues dans DE, sera le même que le nombre de parties *p* que contiendra le côté *de*.

3°. On verra encore que si dans les deux figures on tiroit des lignes qui se répondissent, telles que CE, *ce*, ou les perpendiculaires DF, *df*, &c; ces lignes seroient toûjours entr'elles dans la même raison que les côtés homologues des deux figures.

Donc les figures ABCDE, *abcde*, seront entiérement semblables dans toutes leurs parties.

XLVI.

La figure *abcde* ainſi décrite, parfaitement ſemblable à la figure ABC DE, il eſt évident que ſi on vouloit tracer de nouveau une figure entiérement égale à *abcde*, & par conſéquent, encore ſemblable à ABCDE, il ſeroit inutile de meſurer tous les côtés & tous les angles de *abcde*; qu'il ſuffiroit, par exemple, de prendre les trois côtés *ab*, *ea*, *bc*, & les quatre angles, *e*, *a*, *b*, *c*, & qu'avec cela ſeul on ſeroit ſûr de retracer la même figure *abcde*, ſemblable à ABCDE; ce qui forme une démonſtration complette de ce qu'on n'avoit fait que préſumer (Article XXXVII.). Mais on peut aller plus loin; car il eſt clair qu'on aura toûjours différentes façons de combiner la quantité d'angles & de lignes qu'on doit néceſſairement meſurer dans une figure quelconque, pour en faire une autre qui lui ſoit propor-

tionnelle ; ce feroit fatiguer le Lecteur que d'entrer dans un plus grand détail.

XLVII.

Les aires des figures femblables, font entr'elles comme les quarrés des côtés homologues.

On démontreroit, par des raifonnemens femblables à ceux de l'Article XLIII. que le nombre de quarrés X, que contient la figure ABCDE, eft le même que celui des quarrés *x* renfermés dans la figure *abcde* ; & qu'ainfi, les aires des figures femblables font entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.

XLVIII.

Les figures femblables ne font différentiées que par les échelles fur lefquelles elles font conftruites.

Tout ce qui vient d'être dit fur les figures femblables, peut fe réduire à ce feul & unique principe, que les figures femblables ne font différentiées que par les échelles fur lefquelles elles font conftruites.

XLIX.

Maintenant, pour mieux fen-

tir l'uſage qu'on doit faire des triangles ſemblables & des réductions, pour avoir la meſure des terrains ſur leſquels on ne pourroit pas commodément opérer, figurons-nous que ABCDEF représente le contour d'un Parc, d'un Etang, &c. dont on voudra déterminer l'étendue. D'abord on meſurera un des côtés de la figure, FE par exemple, & l'on verra combien ce côté aura de toiſes, de perches, &c. enſuite prenant telle échelle qu'on voudra, on tracera ſur un carton, ou ſur du papier, une ligne *fe*, égale à autant de parties de l'échelle, que FE contiendra de toiſes, de perches, &c. puis faiſant les angles *def*, *dfe*, égaux aux angles DEF, DFE, on aura le triangle *edf*, dans lequel on abaiſſera *eg*, perpendiculaire ſur *df*: cela fait, & les lignes *df* & *eg*, méſurées par le moyen de l'échelle, on conclura qu'autant que ces lignes contiendront de parties réduites, autant DF & EG contiendront de toiſes, de

PL. V. FIG. 1. & 2.

perches, &c. Ainſi, en multipliant DF par la moitié de EG, on aura la valeur du triangle EDF, & meſurant de la même maniére chacun des autres triangles DCF, BCF, ABF, l'aire de la figure entiére ſe trouvera déterminée.

L.

Maniére de meſurer la diſtance d'un lieu inacceſſible.

IL arrive ſouvent que dans la pratique, il faut meſurer la diſtance du lieu F, où l'on eſt placé à un autre lieu, où quelque obſtacle empêche qu'on ne ſe tranſporte ; nouveau problême, mais dont la ſolution eſt déja donnée d'avance dans l'Article qui précéde celui-ci ; car puiſque pour meſurer DF, on n'a eu beſoin que de la ſimilitude des triangles *def* & DEF, il eſt clair que ſi on meſure une baſe quelconque EF, & que des points F & E, on puiſſe appercevoir le point D, le problême ſera réſolu ; c'eſt-à-dire, qu'on aura la diſtance FD.

LI.

L'USAGE qu'on peut faire des inſtrumens particuliers, tels que BAC, que j'ai dit (Article XXVIII.) composé de deux branches unies au point A, autour duquel elles ont la liberté de tourner, expose ſouvent à bien des mécomptes. Tantôt l'ouverture de l'angle s'altérera dans le tranſport ; tantôt la forme qu'on eſt obligé de donner à l'inſtrument pour en faciliter l'uſage, empêchera qu'on ne puiſſe l'appliquer ſur le plan où devra ſe faire la réduction. FIG. 3.

Ajoûtons à cela, que chaque nouvel angle BAC, qu'on prend de cette façon, demande qu'on tranſporte de nouveau, l'inſtrument ſur le papier, & que la ſeule reſſource qu'on ait pour comparer deux angles, c'eſt de les poſer l'un ſur l'autre, ſans que, par ce moyen, on puiſſe avoir au juſte ni leur rapport, ni leur grandeur abſolue.

LII.

Il étoit donc néceſſaire de chercher une meſure fixe pour les angles, comme on en avoit déja pour les longueurs. Or cette meſure qu'il falloit avoir, il a été facile de la trouver. Car que Ab reſtant fixe, on lui applique d'abord le côté Ac, qu'enſuite on faſſe tourner ce côté autour de A, il eſt clair que ſi ayant adapté à l'extrémité c de la branche mobile Ac, ou une plume, ou un crayon, qui donne moyen de rendre ſenſible la trace du point c, cette trace, qui formera un arc de cercle, donnera exactement la meſure de l'angle, pour chaque ouverture particuliere des côtés Ab, Ac, c'eſt-à-dire, qu'à cauſe de l'uniformité de la courbure du cercle, il arrivera néceſſairement qu'à une ouverture double, triple, quadruple de cAb, répondra un arc double, triple, quadruple de cb.

Fig. 4.

Un angle a pour meſure l'arc de cercle qu'interceptent ſes côtés.

LIII.

SUPPOSANT donc que la circonférence *bcdfg*, décrite par la révolution entiére du point *c*, ſoit diviſée en un nombre quelconque de parties égales, le nombre des parties contenues dans l'arc qu'intercepteront les lignes A*c* & A*b*, meſurera exactement l'ouverture de ces lignes, ou l'angle *c*A*b* qu'elles formeront.

Les Géométres ſont convenus de diviſer le cercle en 360 parties, qu'on appelle dégrés, chaque dégré en 60 minutes, chaque minute en 60 ſecondes, &c. Ainſi, un angle *b*A*c*, par exemple, aura 70 dégrés 20 minutes, ſi l'arc *bc*, qui lui ſervira de meſure, a 70 des 360 parties du cercle, & de plus 20 ſoixantiémes parties d'un dégré.

Le cercle eſt partagé en 360 dégrés ; chaque dégré en 60 minutes, &c.

LIV.

DE-là il ſuit qu'un angle CAB de

FIG. 5.

L'angle droit a 90 dégrés, & ses côtés sont perpendiculaires l'un à l'autre.

90 dégrés, nommé communément angle droit, est celui dont les côtés AC & AB interceptent le quart BC de la circonférence, & sont perpendiculaires l'un à l'autre.

LV.

Un angle aigu est plus petit qu'un angle droit.

On appelle angle aigu tout angle plus petit qu'un angle droit, ou qui a moins de 90 dégrés. Tels sont les angles CAB, FAG, EAG.

Fig. 6.

LVI.

Un angle obtus est plus grand qu'un angle droit.

Au contraire, on appelle angle obtus, celui qui a plus de 90 dégrés, comme FAB.

LVII.

La somme des angles, faits du même côté sur une ligne droite, & qui ont le même sommet, vaut 180 dégrés.

Il est évident que tous les angles, comme GAF, FAE, EAC, CAB, qu'on peut faire du même côté sur une ligne droite GB, & qui ont le même sommet A, sont égaux, pris ensemble à 180 dégrés, ou à deux angles droits, mesurés par la demi-circonférence.

LVIII.

De même la ſomme de tous les angles EAF, FAB, BAC, CAD, DAE, qu'on peut faire autour du point A, qui leur ſert de ſommet commun, eſt égale à 360 dégrés, ou à quatre angles droits méſurés par la circonférence entiére BCDEF.

Fig. 7.
Tous les angles qu'on peut faire autour d'un même point, ſont égaux, pris enſemble, à quatre droits.

LIX.

Aprés avoir trouvé que les angles ont les parties du cercle pour meſure, voyons comment on s'y prend pour déterminer ce qu'un angle qu'on veut meſurer contient de dégrés.

On ſe ſert d'un inſtrument I, qu'on appelle demi-cercle: cet inſtrument eſt compoſé de deux régles EAC, DAB, d'égale longueur qui ſe croiſent en A, & qui ſont chargées de pinnules à leurs extrémités ; l'une de ces régles EC, qu'on nomme alidade, eſt mobile autour de A, & l'autre DB eſt fixe, &

Fig. 8.
Uſage de l'inſtrument appellé demi cercle, pour prendre la grandeur d'un angle.

ſert de diamétre à un demi cercle DCB diviſé en 180 dégrés, &c.

Or veut-on connoître l'angle que forment deux lignes droites, tirées du lieu où l'on eſt, à deux objets quelconques F, G; on place d'abord la régle fixe DAB, de maniere que l'œil placé en D, apperçoive un des deux objets F, par les deux pinnules D & B : enſuite, ſans remuer l'inſtrument, on tourne l'alidade, juſqu'à ce que l'œil placé en E, apperçoive l'autre objet G, par les pinnules E & C ; & alors l'alidade marque ſur le demi-cercle gradüé, le nombre de dégrés, minutes, &c. que contient l'angle propoſé GAF.

LX.

Uſage du rapporteur, pour faire un angle d'un nombre déterminé de dégrés.

SI on veut faire ſur le papier un angle d'un nombre déterminé de dégrés, on ſe ſert d'un inſtrument K *, diviſé en 180 dégrés, qu'on appelle rapporteur, ou tranſporteur, & poſant le centre A ſur la pointe de l'angle qu'on

* Fig. 9.

veut tracer, & la ligne AB ſur la ligne AG, qu'on prend pour un des côtés de l'angle, on marque le point C, qui répond au nombre de dégrés qu'on veut donner à l'angle propoſé, puis par ce point, & par le centre A, tirant la ligne ACO, on a l'angle OAG, qui contient le nombre de dégrés demandé.

LXI.

SUPPOSONS maintenant qu'ayant pris une baſe FG ſur le papier, on veuille faire ſur cette baſe, un triangle FGH, ſemblable au triangle ABC, pris ſur un terrain. On ſe ſervira du demi cercle pour ſçavoir ce que chacun des angles CAB, CBA, contiendra de dégrés; enſuite, par le moyen du rapporteur, on fera les angles HFG & HGF, reſpectivement égaux aux angles CAB & CBA, & alors parce que le point H, auquel les côtés FH & GH ſe réuniront, ſera néceſſaire- Pl. VI. Fig. 1. & 2.

ment déterminé par l'opération, auſſi-bien que l'angle FHG, on aura le triangle FGH, entiérement ſemblable au triangle ABC.

LXII.

COMME il importe dans la pratique, ainſi que nous l'avons déja dit, que les angles ſoient exactement meſurés, il ne faut pas ſe contenter de les prendre, même avec les inſtrumens les plus parfaits, il faut encore trouver le moyen de vérifier leurs meſures, pour en faire la correction, s'il étoit néceſſaire. Or ce moyen eſt ſimple & facile. Reprenons le triangle ABC. On ſent que la grandeur de l'angle C doit réſulter de celle des angles A & B; car qu'on augmentât, ou qu'on diminuât ces angles, la poſition des lignes AC, BC, changeroit, & par conſéquent, l'angle C, que ces lignes font entr'elles. Or ſi cet angle dépend de la grandeur des angles A & B, on doit pré-

ſumer que ce que les angles A & B renferment de dégrés doit déterminer le nombre de dégrés que doit renfermer l'angle C, & qu'ainſi il pourra ſervir de vérification aux opérations qu'on aura faites pour déterminer les angles A & B, puiſqu'on ſera ſûr qu'on aura bien meſuré les angles A & B, ſi, en meſurant enſuite l'angle C, on lui trouve le nombre de dégrés qui lui conviendra relativement à la grandeur des angles A & B.

Pour trouver comment de la grandeur des angles A & B, on peut conclure celle de l'angle C, examinons ce qui arriveroit à cet angle, ſi les lignes AC, BC, venoient ou à s'approcher, ou à s'écarter l'une de l'autre. Suppoſons, par exemple, que BC tournant autour du point B, s'écarte de AB, pour s'approcher de BE, il eſt clair que pendant que BC tourneroit, l'angle B s'ouvriroit continuellement ; & qu'au contraire, l'angle C ſe reſſerreroit FIG. 3.

de plus en plus ; ce qui d'abord pourroit faire présumer que, dans ce cas, la diminution de l'angle C égaleroit l'augmentation de l'angle B, & qu'ainsi la somme des trois angles A, B, C, seroit toûjours la même, quelle que fût l'inclinaison des lignes AC, BC, sur la ligne AE.

LXIII.

Fig. 4.

Les angles alternes sont les angles renversés que forme, de part & d'autre, une ligne droite qui tombe sur deux paralleles.

Or cette induction présumée porte avec elle sa démonstration ; car qu'on méne ID, parallele à AC, on verra premiérement que les angles ACB & CBD, appellés angles alternes, seront égaux, ce qui est évident, puisque les lignes AC & IB étant paralleles, elles seront également inclinées sur CBO, & qu'ainsi l'angle IBO égalera l'angle ACB. Mais l'angle IBO égalera aussi l'angle CBD, parce que la ligne ID ne sera pas plus inclinée sur CO d'un côté que de l'autre. Donc l'angle DBC égal à l'angle IBO, égalera l'angle ACB, son alterne.

Ces angles sont égaux.

LXIV.

LXIV.

On verra, en ſecond lieu, que l'angle CAE ſera égal à l'angle DBE, à cauſe des paralleles CA & DB. Donc les trois angles du triangle pourroient être mis à côté les uns des autres, & unis par leurs ſommets aux points B, & alors on verroit que les trois angles DBE, CBD & CBA, qui égaleroient les trois angles CAB, ACB, CBA, ſeroient égaux à deux angles droits (Article LVII.) & comme tout ce que nous venons de dire pourra également s'appliquer à quelque triangle que ce ſoit, on ſera aſſuré de cette propriété générale que la ſomme des trois angles d'un triangle eſt conſtamment la même, & qu'elle eſt égale à deux droits, ou, ce qui revient au même, à 180 dégrés.

La ſomme des trois angles d'un triangle eſt égale à deux angles droits.

LXV.

Donc, pour conclure la valeur du

troisiéme angle d'un triangle, lorsqu'on en aura mesuré deux, il faudra retrancher de 180 dégrés le nombre de dégrés que les deux angles feront ensemble. Propriété qui donne une maniére bien commode de vérifier la mesure des angles d'un triangle, & dont on verra une infinité d'autres utilités, à mesure qu'on avancera. Nous nous contenterons ici d'en tirer les conséquences les plus immédiates.

LXVI.

Un triangle ne peut avoir plus d'un angle droit ; à plus forte raison ne peut-il avoir plus d'un angle obtus.

LXVII.

Si l'un des trois angles d'un triangle est droit, la somme des deux autres angles est toûjours égale à un droit.

Ces deux propositions sont si claires, qu'elles n'ont pas besoin d'être démontrées.

LXVIII.

Si on prolonge un des côtés du triangle ABC, le côté AB, par exemple, l'angle extérieur CBE vaudra seul les deux angles intérieurs opposés BCA, CAB; car qu'à l'angle CBA, on ajoûte, ou les deux angles BCA & CAB, ou l'angle CBE, la somme sera toûjours égale à 180 dégrés, ou à deux angles droits (Article LXIV.).

L'angle extérieur d'un triangle, vaut les deux angles intérieurs opposés.

LXIX.

Connoissant un des angles d'un triangle isocéle ABC, on connoît les deux autres.

FIG. 5.

Qu'on ait l'angle au sommet A; il est clair que si on retranche le nombre de dégrés que contiendra cet angle des 180 dégrés, mesure des trois angles du triangle, la moitié de la somme qui restera sera la mesure de chacun des angles B, C, pris sur la base.

Un angle d'un triangle isocéle donne les deux autres.

Que ce fût un de ces angles B, C,

qu'on connût, le double de ſa valeur retranché de 180 dégrés, donneroit l'angle au ſommet A.

LXX.

Les angles d'un triangle équilatéral, ſont chacun de 60 dégrés.

COMME un triangle équilatéral n'eſt autre choſe qu'un triangle iſocéle auquel chacun de ſes côtés peut également ſervir de baſe, il eſt clair que ſes trois angles ſont néceſſairement égaux, & qu'ils valent chacun 60 dégrés, tiers de 180 dégrés.

LXXI.

Deſcription de l'exagone.

DE là ſe tire aiſément la deſcription de l'exagone ou poligone de ſix côtés, que nous avions promiſe (Article XXIV.) .

Car pour trouver une ligne qui partage la circonférence en ſix parties égales, il faudra que cette ligne ſoit la corde d'un arc de 60 dégrés, ſixiéme partie de 360 dégrés, valeur de la circonférence entiére. Suppoſant donc

que AB soit cette corde, & du centre I menant aux extrémités A & B les rayons AI & IB, l'angle AIB vaudra 60 dégrés, & parce que les deux côtés AI & IB seront égaux, le triangle AIB sera isocéle. Donc l'angle au sommet étant de 60 dégrés, chacun des deux autres angles vaudra aussi 60 dégrés, moitié de 120. Donc (Article LXX.) le triangle AIB sera équilatéral. Donc AB égalera le rayon du cercle. D'où il suit, que pour décrire un exagone, il faudra ouvrir le compas d'un intervalle égal au rayon, & le porter six fois de suite sur la circonférence, & l'on aura les six côtés de l'exagone. Fig. 6.

LXXII.

L'Exagone ABCDEF décrit, on décrira facilement le dodécagone, ou poligone de douze côtés.

Pour cela, on divisera l'arc AKB, ou l'angle AIB, en deux parties égales, La moitié de l'angle au centre de l'exagone

donne l'angle au centre du dodécagone.

& AK, corde de la moitié de l'arc AKB, sera un des côtés du dodécagone.

LXXIII.

Partager un angle en deux également.

OR pour partager l'arc AKB, en deux arcs égaux AK & KB, on fera la même opération que s'il s'agissoit de couper la corde AB en deux parties égales ; c'est-à-dire, que des points A & B, comme centres, & d'un intervalle quelconque, on décrira les arcs MLN, OLP, & par le point L, section des deux arcs, & par le centre I on ménera la ligne LI, qui divisera en deux & l'arc AKB, & la corde AB.

LXXIV.

Description des Poligones de 24, 48, &c. côtés.

QU'ON suive la méthode précédente, & qu'on partage l'arc AK en deux arcs égaux, la corde de l'un ou de l'autre de ces arcs, sera le côté du poligone de 24 côtés. On aura de même les poligones de 48, 96, 192, &c. côtés.

LXXV.

MAINTENANT pour décrire un octogone; c'est-à-dire, un poligone de 8 côtés, on commencera par tracer un quarré dans le cercle ; ce qu'on fera, si, après avoir mené deux diamétres AIB & CIE, qui se coupent à angles droits : on joint leurs extrémités par les lignes AC, CB, BE, AE.

Description de l'octogone.

FIG. 7.

Car à cause de la régularité du cercle, & de l'égalité des quatre angles que forment les perpendiculaires AIB, CIE, les quatre côtés AC, CB, BE, EA, seront nécessairement égaux, & se trouveront également panchés les uns sur les autres ; ce qui ne pourra convenir qu'au quarré.

Le quarré ainsi décrit, on divisera, par la méthode précédente, chacun des arcs CKB, BLE, &c. en deux parties égales ; ce qui donnera l'octogone CKBLEMAN.

Qu'on partageât de même chacun

Et des poligones de 16, 32, &c. côtés.

des arcs CK, KB, &c. en 2, en 4, en 8, &c. parties égales, on auroit les poligones de 16, 32, 64, &c. côtés.



Planche I

Fig. I.

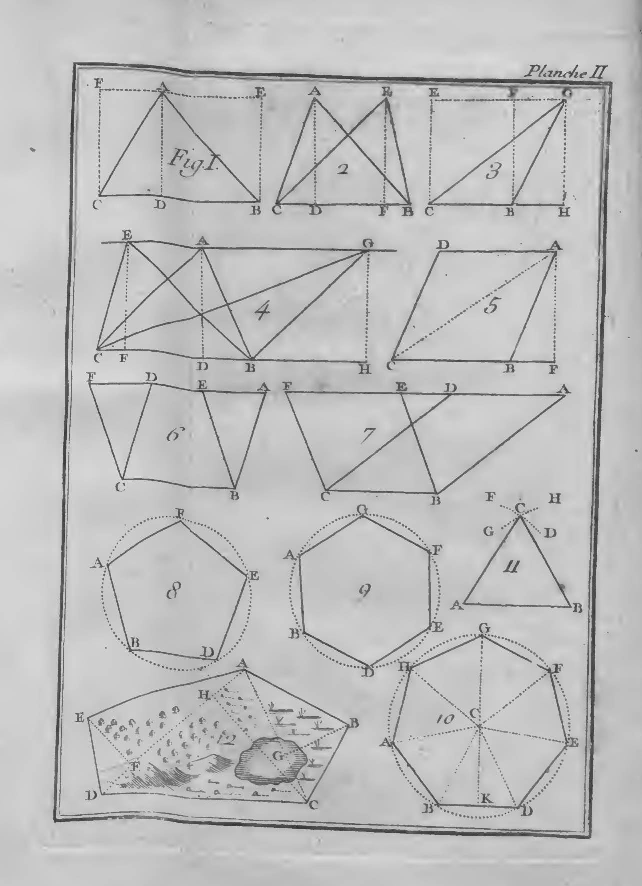


Planche II
Fig. I.
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

Planche III

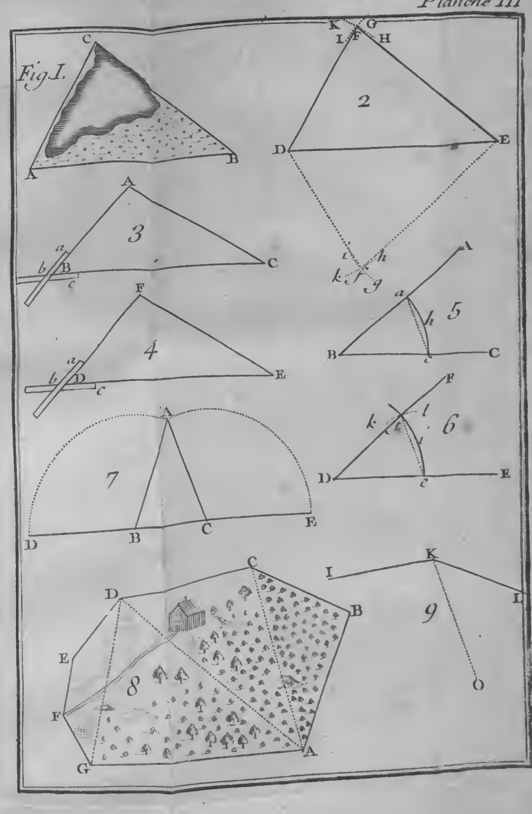


Fig. I.
C
A
B
K
G
I
F
H
2
D
E
A
3
a
b
B
c
C
i
h
k
f
g
A
a
h
5
B
c
C
F
4
a
b
D
c
E
F
k
l
6
D
e
E
A
7
D
B
C
E
C
D
B
E
8
F
G
A
I
K
L
9
O



Planche IV

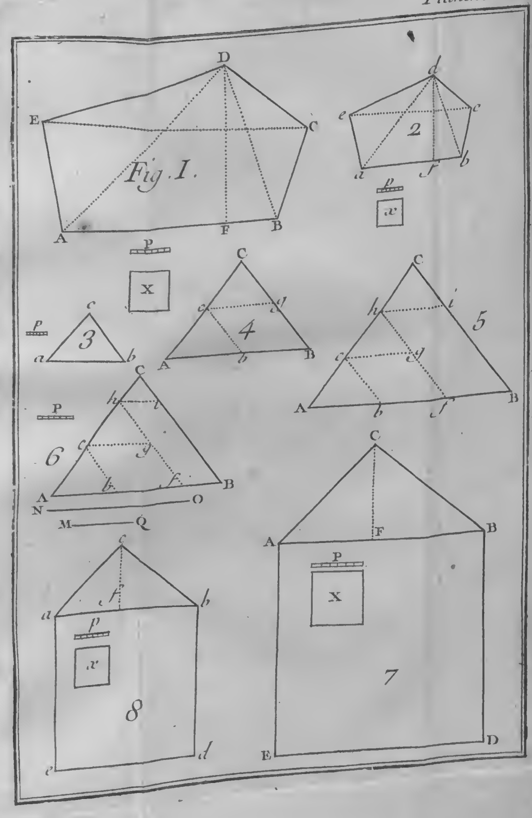


Fig. I.
D
E
C
A
F
B
P
X
d
e
c
2
a
f
b
p
x
C
c
g
4
A
b
B
C
h
i
5
c
g
A
b
f
B
c
3
a
b
p
C
h
i
P
c
g
6
A
b
f
B
N
O
M
Q
C
A
F
B
P
X
7
E
D
c
f
a
b
p
x
8
e
d



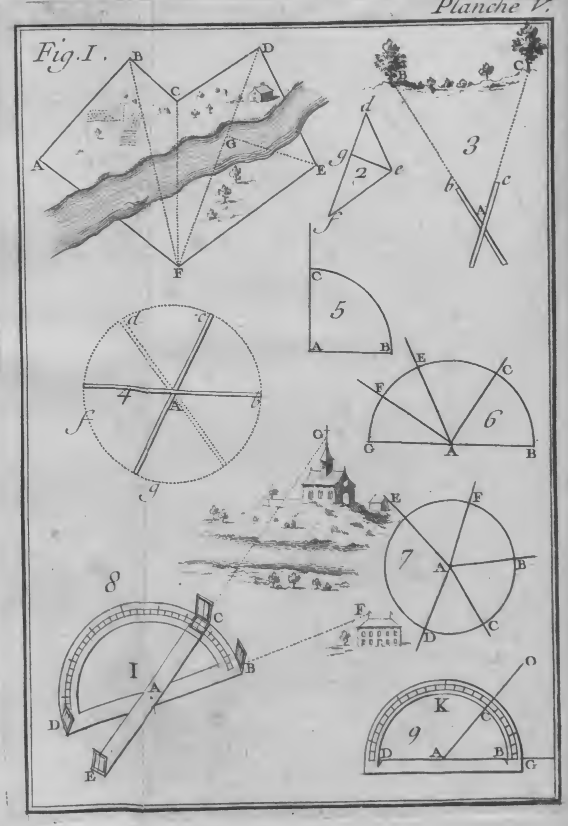

Fig. I.
A
B
C
D
E
F
G
2
d
e
f
g
3
b
c
4
5
6
7
8
9
I
K
O



Planche VI

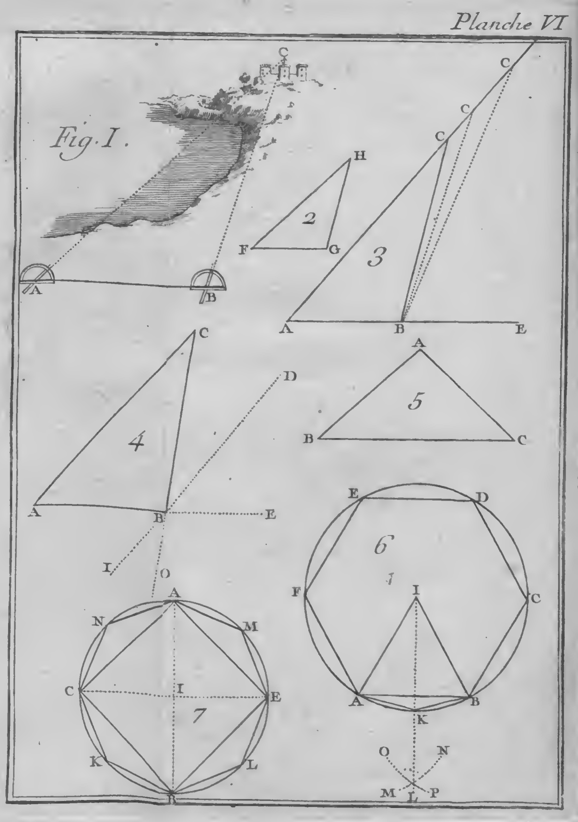
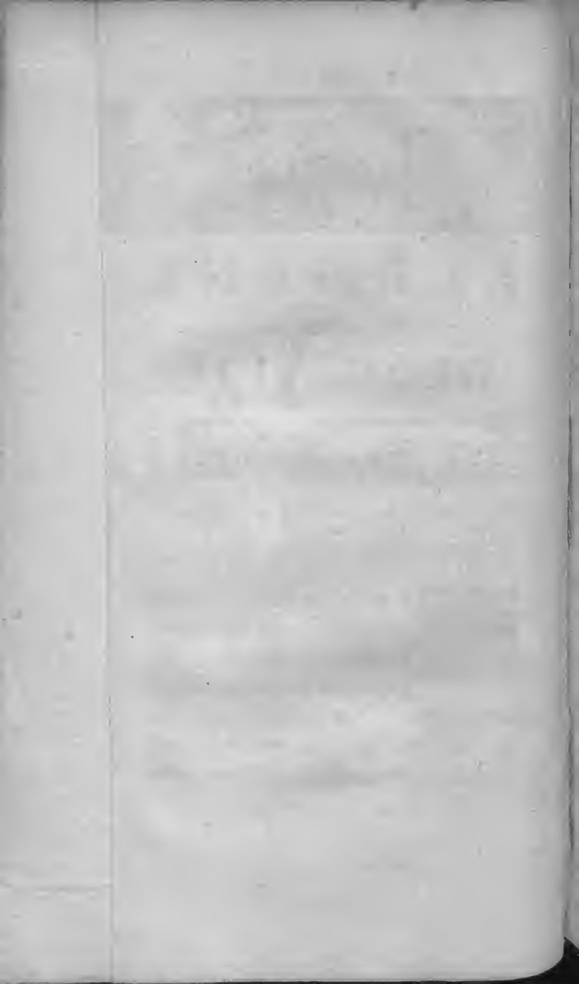


Fig. I.
C
A
B
H
2
F
G
C
C
C
3
A
B
E
C
4
D
A
B
E
I
O
A
5
B
C
E
D
6
F
C
I
A
B
K
O
N
M
L
P
A
N
M
C
I
E
7
K
L
B





ELEMENS DE GEOMETRIE.

SECONDE PARTIE.

De la méthode géométrique de comparer les figures rectilignes.



SI on a fait attention à ce que nous avons dit, pour montrer comment on eſt parvenu à meſurer les Terrains, on a dû reconnoître que les poſitions des lignes les unes à l'égard des autres, fourniſſoient des remarques

dignes d'attention par elles-mêmes, indépendamment de l'utilité dont elles pouvoient être dans la pratique; & il est à présumer que ces remarques ont engagé les premiers Géométres à pousser plus loin leurs découvertes, car ce ne sont pas seulement les besoins qui déterminent les hommes, la curiosité est souvent un aussi grand motif pour exciter leurs recherches.

Ce qui a dû contribuer encore au progrès de la Géométrie, c'est le goût qu'on a naturellement pour cette précision rigoureuse, sans laquelle l'esprit n'est jamais satisfait.

Aussi lorsqu'en mesurant les figures, on s'est apperçu que dans une infinité de cas, les échelles & les demi cercles ne donnoient que des valeurs approchées des lignes ou des angles, on a cherché des méthodes qui suppléassent au défaut de ces instrumens.

Ici nous reprendrons les figures rectilignes; mais dans les opérations que

nous ferons pour découvrir leurs justes rapports, nous ne nous servirons que de la régle & du compas.

Il arrive souvent qu'on a besoin ou de rassembler dans une même figure, plusieurs figures qui lui soient semblables, ou de décomposer une figure en d'autres figures de même espéce ; ce qu'on peut faire en opérant d'abord sur les rectangles, puisque toutes les figures rectilignes ne sont que des assemblages de triangles, & que chaque triangle est la moitié d'un rectangle qui a même hauteur & même base.

I.

POUR comparer les rectangles, il faut sçavoir changer un rectangle quelconque en un autre qui ait la même superficie, mais dont la hauteur soit différente. Car lorsque deux rectangles seront changés en deux autres de même hauteur, ils ne différeront plus que par leurs bases ; le plus grand sera celui

qui aura la plus grande baſe, & il contiendra le plus petit de la même maniére que ſa baſe contiendra celle du plus petit rectangle ; ce qu'on énonce ordinairement ainſi : Deux rectangles qui ont même hauteur, ſont en même raiſon que leurs baſes.

Deux rectangles qui ont même hauteur, ſont en même raiſon que leurs baſes.

II.

Pour ajoûter ces deux rectangles, il ne faudra que les poſer l'un à côté de l'autre.

III.

Il ne ſera pas plus difficile de retrancher le plus petit du plus grand.

IV.

Et pour partager un rectangle en un nombre déterminé de rectangles égaux, il faudra couper ſa baſe en un pareil nombre de parties égales, enſuite élever des perpendiculaires ſur les points de diviſion.

V.

MAINTENANT ſoit propoſé de changer le rectangle ABCD en un autre BFEG, qui ait la même ſuperficie, & dont la hauteur ſoit BF, on remarquera que puiſque ſa valeur ſera le produit de ſa hauteur par ſa baſe, il faudra que le rectangle cherché BFEG, dont la hauteur ſera plus grande que BC, ait ſa baſe plus petite que AB : c'eſt-à-dire, que ſi BF, par exemple, eſt double de BC, il faudra que BG ne ſoit que la moitié de AB.

PL. VII. FIG. I. Maniére de changer un rectangle en un autre, qui ait une hauteur donnée.

Si BF étoit le triple de BC, BG ne ſeroit que le tiers de AB.

On verroit de même que ſi BF, au lieu de contenir BC un nombre exact de fois, le contenoit avec fraction, comme deux fois & un tiers, le rectangle BFEG ne pourroit être égal au rectangle ABCD, que ſa baſe BG ne fût auſſi contenuë deux fois & un tiers dans la baſe AB. Et en général, il ſera

aisé de voir qu'afin que deux rectangles ABCD, BFEG, soient égaux, il faudra que la base BG de l'un soit contenue dans la base AB de l'autre, comme la hauteur BC dans la hauteur BF.

Il ne s'agira donc plus que de diviser la ligne AB, de manière que AB soit à GB, comme BF à BC; ce qui se fera (I. Part. Art. XLI.) en menant la ligne FA, & du point donné C, la parallelle CG.

VI.

Seconde maniére de changer un rectangle en un autre, dont la hauteur soit donnée.

POUR changer le rectangle ABCD en un autre rectangle BFEG, qui ait une hauteur donnée BF, on peut employer une méthode moins naturelle que la précédente, mais plus commode. Ayant prolongé AD, jusqu'à ce qu'elle rencontre en I la droite FEI, menée par le point F, parallelement à AB, on tirera la diagonale BI, & par le point O, où elle rencontrera le côté DC, on ménera GOE, parallele à FB,

FIG. 2.

& le rectangle BFEG sera égal au rectangle ABCD.

Pour le prouver, il suffira de faire voir qu'en ôtant des rectangles ABCD, BFEG, la partie commune OCBG, le rectangle ADOG égalera le rectangle EOCF.

Or si on fait attention à l'égalité des deux triangles IBF, IBA, on verra qu'en retranchant de ces triangles des quantités égales, les restes seront égaux. Mais le triangle IAB deviendra le rectangle ADOG, si on en retranche les deux triangles IDO, OGB; de même le triangle IBF deviendra le rectangle EOCF, par le retranchement des triangles IEO, OBC, égaux aux deux premiers. Donc les deux rectangles AD OG, EOCF, restes des deux triangles, seront égaux entr'eux, aussi-bien que les rectangles ABCD, BFEG.

VII.

CETTE seconde maniére de changer

On démontre rigoureusement que si deux rectangles sont égaux, la base du premier est à la base du second, comme la hauteur du second à la hauteur du premier.

un rectangle en un autre, confirme le principe que suppose la premiére, & qui auroit pû sembler n'être appuyé que sur une simple induction.

De l'égalité des deux rectangles AB CD, BFEG, on avoit conclu qu'il falloit que AB fût à BG, comme BF à BC ; c'est ce qu'on peut maintenant prouver par l'Article précédent.

Car les triangles IAB & OGB, étant manifestement semblables, la base AB du grand sera à la base GB du petit, comme la hauteur IA à la hauteur OG, ou comme BF à BC leurs égales. Donc AB sera à GB comme BF à BC, conformément au principe de l'Article V.

VIII.

De la maniére qu'on vient de s'y prendre pour démontrer que de l'égalité des deux rectangles ABCD, BF EG, il suit que la hauteur BF est à la hauteur BC, comme la base AB, à la

la base BG, on démontreroit aussi que lorsque quatre lignes BF, BC, AB, BG, seront telles que la premiere sera à la seconde, comme la troisiéme à la quatriéme; le rectangle qui auroit pour hauteur & pour base la premiere & la quatriéme de ces lignes, seroit égal au rectangle qui auroit pour hauteur & pour base la seconde & la troisiéme.

Si quatre lignes sont telles que la premiere, soit à la seconde, comme la troisiéme à la quatriéme, le rectangle formé par la premiere & par la quatriéme sera égal à celui que forment la seconde & la troisiéme.

IX.

LORSQUE quatre quantités, ainsi que les lignes précédentes BF, BC, AB, BG, sont telles que la premiere est la seconde, comme la troisiéme à la quatriéme, on dit que ces quatre quantités sont en proportion, ou qu'elles forment une proportion. Ainsi, 6, 9, 18, 27, sont en proportion, parce que 6 est contenu dans 9, de la même maniére que 18 est contenu dans 27. Il en est de même de 15, 25, 75, 125, &c.

Quatre quantités, dont la premiere est à la seconde, comme la troisiéme à la quatriéme, sont dites former une proportion.

X.

Des quatre termes d'une proportion, le premier & le quatriéme, sont nommés extrêmes; on nomme moyens le second & le troisiéme.

LA premiere & la quatriéme des quatre quantités d'une proportion, s'appellent termes extrêmes, ou simplement extrêmes; la seconde & la troisiéme se nomment termes moyens, ou simplement, moyens.

En se servant des définitions précédentes, il est clair que les propositions renfermées dans les Articles VII. & VIII. s'énonceront ainsi.

XI.

Dans une proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.

LORSQUE quatre quantités sont en proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.

XII.

Si le produit des extrêmes est égal au produit des moyens les quatre termes forment une proportion.

SI quatre quantités sont telles que le produit des extrêmes soit égal au produit des moyens, ces quatre quantités seront en proportion.

XIII.

Il eſt à propos de faire beaucoup d'attention aux deux Articles précédens ; ils ſont d'un grand uſage : on en déduit, entr'autres choſes, la démonſtration de la régle qu'on appelle en Arithmétique, Régle de trois. Pour donner une idée de cette régle, nous prendrons un exemple ; c'eſt la maniére la plus ſimple de ſe faire entendre.

De-là on tire la régle de trois,

Suppoſons que 24 Ouvriers ayent fait 30 toiſes d'ouvrages en un certain temps, on demande combien 64 Ouvriers en feront dans un temps égal.

Il eſt évident que pour réſoudre la queſtion, il faut trouver un nombre qui ſoit à 64, dans la même raiſon que 30 à 24. Or, ſuivant ce que nous avons vû, ce nombre ſera tel que ſon produit par 24 égalera le produit de 30 par 64. Mais le produit de 30 par 64 eſt 1920. Donc le nombre cherché ſera celui qui étant multiplié par 24 donnera 1920.

Or pour peu qu'on ait d'idée des opérations de l'Arithmétique, on doit aisément s'appercevoir qu'il faudra que ce nombre soit le quotient de la division de 1920 par 24, c'est-à-dire 80.

Ou la maniére de trouver le quatriéme d'une proportion, dont les trois premiers sont donnés.

En général, pour trouver le quatriéme terme d'une proportion, dont les trois premiers seront donnés, il faudra prendre le produit du second & du troisiéme, & diviser ce produit par le premier terme de la proportion.

XIV.

Un exemple aussi simple que celui que nous venons de choisir, ne fait peut-être pas assez sentir la nécessité de la méthode précédente. Le bon sens seul feroit trouver le nombre demandé. On voit que 30 surpasse 24 d'un quart, & qu'ainsi il faut que le nombre cherché surpasse 64 d'un quart; ce qui donne 80. Mais il y a des cas où l'on pourroit chercher plus longtemps le rapport des deux premiers nombres de la proportion.

Par exemple, on veut un quatriéme terme proportionnel aux trois nombres 259, 407, 483.

Pour le trouver par la méthode précédente, il faut multiplier 483 par 407, & diviser 196581, qui en eſt le produit par 259; ce qui donne 759 pour le quatriéme terme cherché.

Si on s'y étoit pris autrement pour trouver ce terme, ce n'auroit pû être qu'en tâtonnant. On auroit bien pû découvrir, par exemple, que 148, excès de 407 ſur 259, contient quatre des ſeptiémes parties de 259; qu'ainſi il falloit ajoûter de même à 483, le nombre 276, qui contient quatre de ſes ſeptiémes parties. Mais la généralité & la ſûreté de la méthode précédente, nous ſauve toûjours de l'embarras des tâtonnemens, qui même deviendroient inutiles dans bien des cas.

XV.

LORSQU'ON aura deux quarrés à

ajoûter, leur addition ſe fera de la même maniére que celle de deux rectangles, puiſque les quarrés ſont des rectangles dont la hauteur & la baſe ſont égales. On changera donc un des quarrés; le plus petit, par exemple, en un rectangle qui aura le côté du grand pour hauteur, & les deux quarrés ne feront plus qu'un rectangle. On pourroit donner de même la hauteur du petit quarré à tous les deux, ou une autre hauteur à volonté; mais ce qu'on ne pouvoit guéres manquer de ſe propoſer, lorſqu'on a voulu réduire ainſi deux quarrés en une ſeule figure, c'étoit de faire un quarré égal à deux autres. Problême dont il étoit aiſé de trouver la ſolution ſuivante.

XVI.

FIG. 3. Faire un quarré double d'un autre.

SUPPOSONS d'abord que les deux quarrés ABCD, CBFE, dont on ſe propoſe de faire un ſeul quarré, ſoient égaux entr'eux; il eſt aiſé de remarquer

que si on tire les diagonales AC & CF, les triangles ABC & CBF, feront ensemble la valeur d'un quarré. Donc en transportant au-dessous de AF les deux autres triangles DCA & CEF, on fera le quarré ACFG, dont le côté AC sera la diagonale du quarré ABCD, & dont la superficie égalera celle des deux quarrés proposés ; ce qui n'a pas besoin d'être démontré.

XVII.

SUPPOSONS présentement qu'on veuille faire un quarré égal à la somme des deux quarrés inégaux ADC*d*, CFE*f*, ou, ce qui revient au même, qu'on se propose de changer la figure ADFE*fd* en un quarré.

FIG. 4. Faire un quarré égal à deux autres pris ensemble.

En suivant l'esprit de la méthode précédente, on cherchera s'il n'est point possible, de trouver dans la ligne DF, quelque point H, tel,

1°. Que tirant les lignes AH & HE, & faisant tourner les triangles ADH,

EFH, autour des points A & E, jusqu'à ce qu'ils ayent les positions A*dh*, E*fh* ; ces deux triangles se joignent en *h*.

2°. Que les quatre côtés AH, HE, E*h*, *h*A, soient égaux & perpendiculaires les uns aux autres.

Or ce point H se trouvera en faisant DH égal au côté CF ou EF. Car de l'égalité supposée entre DH & CF, il suit premierement que si on fait tourner ADH autour de son angle A, en sorte qu'on lui donne la position A*dh*, le point H arrivé en *h* sera distant du point C d'un intervalle égal à DF.

De la même égalité supposée entre DH & CF, il suit encore que HF égalera DC, & qu'ainsi le triangle EFH tournant autour de E pour prendre la position E*fh*, le point H arrivera au même point *h*, distant de C d'un intervalle égal à DF.

Donc la figure ADFE*fd* sera changée en une figure à quatre côtés AHE*h*.

Il ne s'agit donc plus que de voir ſi ſes quatre côtés ſeront égaux & perpendiculaires les uns aux autres.

Or l'égalité de ces quatre côtés eſt évidente, puiſque A*h* & *h*E ſeront les mêmes que AH & HE, & que l'égalité de ces deux derniers ſe tirera de ce que DH étant égale à CF ou à FE, les deux triangles ADH, HEF, ſeront égaux & ſemblables.

Il ne reſte donc plus qu'à voir ſi les côtés de la figure AHE*h* formeront des angles droits; c'eſt de quoi il eſt aiſé de s'aſſurer, en remarquant que pendant que HAD tournera autour de A, pour arriver en *h*A*d*, il faudra que le côté AH faſſe le même mouvement que le côté AD. Or le côté AD fera un angle droit DA*d*, en devenant A*d*. Donc le côté AH fera auſſi un angle droit HA*h* en devenant A*h*.

Quant aux autres angles H, E, *h*, il eſt viſible qu'ils ſeront néceſſairement droits. Car il ne ſeroit pas poſſible

qu'une figure terminée par quatre côtés égaux eût un angle droit, sans que les trois autres fussent pareillement droits.

XVIII.

Si on remarque que les deux quarrés ADCd, CFEf sont faits, l'un sur AD, moyen côté du triangle ADH, l'autre sur EF, égal à DH, petit côté du même triangle ADH; & que le quarré AHEh, égal aux deux autres, est décrit sur le grand côté AH, qu'on nomme communément l'hypoténuse du triangle rectangle; on découvrira bien-tôt cette fameuse propriété des triangles rectangles, que le quarré de l'hypoténuse est égal à la somme des quarrés faits sur les deux autres côtés.

L'hypoténuse d'un triangle rectangle est son grand côté.

Et le quarré de ce côté est égal à la somme des quarrés faits sur les deux autres.

XIX.

Fig. 5. & 6.

D'où se tire une maniére simple de réduire deux quarrés en un seul.

Donc lorsque de deux quarrés HDKL, ABCD, on n'en voudra faire qu'un seul, il sera inutile de les mettre à côté l'un de l'autre, & de les décom-

poser, comme on a fait dans l'Article XVII. Il suffira de placer leurs côtés AD, DH, de façon qu'ils fassent un angle droit, & de tirer ensuite la ligne AH, puisqu'alors cette ligne sera le côté du quarré cherché AHIE.

FIG. 7.

XX.

SI on avoit deux figures semblables DAFGM, DHPON, & qu'on se proposât d'en faire une troisiéme, égale en superficie aux deux autres prises ensemble, il ne faudroit que poser les bases AD, HD de ces figures, sur les deux côtés d'un angle droit ADH, & l'hypoténuse AH du triangle ADH seroit la base de la figure demandée.

FIG. 8. & 9.

FIG. 10.

Si les côtés d'un triangle rectangle servent de bases à trois figures semblables, la figure faite sur l'hypoténuse égalera les deux autres prises ensemble.

Pour en voir la raison qu'on imagine les quarrés ABCD, DHKL, AHIE, faits sur les bases des trois figures semblables, on verra d'abord par l'Article XVIII. que le quarré AHIE vaudra lui seul les deux autres quarrés ABCD, DHKL. Or les figures

ſemblables ſont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues, (I. Part. Art. XLVII.). Donc les trois quarrés ABCD, DHKL, AHIE, ſe trouveront les mêmes parties des figures DAFGM, DHPON, AHQRS.

D'où il ſera aiſé de conclure que la figure AHQRS vaudra les deux autres. Suppoſons, par exemple, que chacun de ces quarrés fût la moitié de la figure dans laquelle il ſeroit renfermé, perſonne ne douteroit que la figure AHQRS ne fût égale aux deux autres, puiſque ſa moitié vaudroit ſeule les moitiés des deux figures DHPON, DAFGM. Il en ſeroit de même ſi les quarrés ABCD, DHKL, AHIE, étoient les deux tiers, les trois quarts, &c. des figures DAFGM, DHPON, AHQRS.

XXI.

Si on ſe propoſoit d'ajoûter trois

quatre, &c. figures ſemblables, ou, ce qui revient au même, trois, quatre, &c. quarrés, la méthode ſeroit toûjours la même. Qu'on voulût, par exemple, en ajoûter trois, on feroit d'abord un quarré égal aux deux premiers; enſuite à ce nouveau quarré on ajoûteroit le troiſiéme, & par-là on auroit un quarré égal aux trois quarrés propoſés.

Réduire plusieurs figures ſemblables à une ſeule.

XXII.

De-là il ſuit que ſi on ſe propoſoit de faire un quarré, cinq, ſix, &c. fois plus grand qu'un autre, il ſuffiroit de ſuivre la méthode précédente pour réſoudre ce problême, & même ſon inverſe; c'eſt-à-dire, pour faire un quarré qui ne ſeroit que la cinquiéme, la ſixiéme, &c. partie d'un quarré propoſé; ce qui demanderoit ſimplement qu'on ſe rappellât la maniére de trouver une quatriéme proportionnelle à trois lignes données. Mais dans la

troisiéme Partie de cet Ouvrage, nous donnerons une méthode plus directe & plus commode pour résoudre ces sortes de problêmes.

XXIII.

L'ADDITION des figures semblables fournit une preuve décisive de la nécessité d'abandonner les échelles, quand on veut faire les opérations d'une maniére qui puisse se démontrer rigoureusement.

Supposons, par exemple, qu'on eût à faire un quarré double d'un autre, ceux qui ne sçauroient par la méthode donnée dans l'Article XVI. s'y prendroient vraisemblablement de la maniére suivante.

Ils diviseroient le côté du quarré donné dans un grand nombre de parties, en 100 parties par exemple ; ensuite multipliant 100 par 100, ils trouveroient 10000 pour la valeur du quar-

ré ; ce qui donneroit 20000 pour celle du quarré demandé.

Mais de la valeur de celui-ci, ils ne tireroient pas la maniére de le décrire ; il faudroit qu'ils euſſent ſon côté exprimé par un nombre, & que ce nombre fût tel qu'en le multipliant par lui-même ; c'eſt-à-dire, en le quarrant, le produit donnât 20000.

Le produit qui réſulte de la multiplication d'un nombre par lui-même eſt le quarré de ce nombre.

Or le nombre dont ils auroient beſoin, ce ſeroit en vain qu'ils le chercheroient ſur une échelle dont les parties ſeroient des centiémes du côté du premier quarré ; car 141, multiplié par lui-même, donneroit 19881, & 142 donneroit 20164 ; ce qui s'écarteroit de part & d'autre du nombre qu'ils devroient trouver.

Peut-être pourroient-ils croire qu'en partageant le côté du quarré donné en plus de 100 parties, ils trouveroient un nombre déterminé de ces parties pour le côté du quarré double du premier ; mais quelques eſſais qu'ils

pûssent faire, ils trouveroient toûjours que ce seroit en vain qu'ils chercheroient deux nombres, dont l'un exprimeroit le côté; ou, suivant le langage ordinaire, la racine d'un quarré, & l'autre, le côté, ou la racine du quarré double.

La racine d'un quarré, est le nombre qui, multiplié par lui-même, donne le quarré.

XXIV.

En effet, on démontre en Arithmétique, que si deux nombres ne sont pas multiples l'un de l'autre; c'est-à-dire, si l'un ne contient pas l'autre un nombre exact de fois, le quarré du plus grand ne sera pas, non plus, multiple du quarré du plus petit. Ainsi 5, par exemple, ne pouvant pas se diviser exactement par 4, son quarré 25 ne pourra pas, non plus, se diviser par 16 quarré de 4.

Un nombre est multiple d'un autre, lorsqu'il le contient plusieurs fois exactement;

Donc si on quarre deux nombres, dont l'un soit plus grand que l'autre, & en soit cependant moins quele double, il viendra, par cette opération, deux

deux autres nombres, dont l'un sera moindre que le quadruple de l'autre, mais sans en pouvoir être ni le double, ni le triple. Donc, qu'on divise le côté d'un quarré en tel nombre de parties qu'on voudra, le côté du quarré double, qui, suivant ce qui est démontré dans l'Article XVI. sera la diagonale de ce quarré, ne contiendra pas un nombre exact de ces mêmes parties ; ce qu'on exprimeroit dans le langage des Géométres, en disant, que le côté du quarré & sa diagonale sont incommensurables.

Le côté d'un quarré & sa diagonale, sont incommensurables.

XXV.

On peut encore remarquer qu'il y a quantité d'autres lignes qui n'ont aucune commune mesure.

Autres lignes incommensurables.

Car, qu'on écrive les deux suites,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, &c.

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, &c.

dont la premiere exprime les nombres naturels, & l'autre leurs quarrés; on verra que comme les nombres qui ſeront entre 4 & 9, entre 9 & 16, entre 16 & 25, &c. n'auront aucune racine, les côtés de deux quarrés, dont l'un ſera ou triple, ou quintuple, ou ſextuple, &c. ſeront incommenſurables entr'eux.

XXVI.

Mais de ce que pluſieurs lignes ſont incommenſurables avec d'autres, peut-être pourroit-il naître quelque ſoupçon ſur l'exactitude des propoſitions qui nous ont ſervi à conſtater la proportionalité des figures ſemblables. On a vû qu'en comparant ces figures (I. Part. Art. XXXIV. & ſ.), nous avons toûjours ſuppoſé, qu'elles avoient une échelle qui pouvoit également ſervir à meſurer toutes leurs parties : Suppoſition qui maintenant paroîtroit devoir être limitée, à cauſe de ce qui vient d'être dit; il faut donc que nous reve-

nions ſur nos pas, & que nous examinions ſi nos propoſitions, pour être vrayes, n'auroient pas elles-mêmes beſoin de quelques modifications.

XXVII.

REPRENONS d'abord ce qui eſt dit dans l'Article XXXIX. de la premiere Partie; & voyons s'il eſt exactement vrai que les triangles tels que *abc*, ABC, dont les angles ſont les mêmes, ayent leurs côtés proportionnels. Suppoſons, par exemple, que la baſe du premier étant *ab*, celle du ſecond ſoit une droite AB, égale à la diagonale d'un quarré dont *ab* ſeroit le côté; & cherchons ſi, dans cette ſuppoſition, le rapport de AC à *ac*, ſera le même que celui de AB à *ab*. FIG. 11. & 12.

Quoique, ſuivant ce que nous avons vû, quelque grand que pût être le nombre des parties qu'on ſuppoſeroit arbitrairement dans *ab*, AB ne pourroit jamais contenir un nombre exact de ces

parties, il eſt cependant aiſé de s'appercevoir que plus ce nombre ſera grand, plus AB approchera d'être méſuré exactement avec les parties de *ab*. Suppoſons *ab* diviſé en 100 parties; ce que AB contiendra de ces parties ſe trouvera entre 141 & 142 (Article XXIII.). Contentons-nous de 141, & négligeons le petit reſte. Il eſt clair (I. Part. Art. XXXIX.) que AC contiendra auſſi 141 des parties de *ac*.

Suppoſons enſuite *ab* diviſé en 1000 parties; ce que AB contiendra des parties de *ab*, ſera entre 1414 & 1415; ne prenons que 1414, & négligeons encore le reſte, on trouvera de même que AC contiendra 1414 des milliémes parties de *ac*, & qu'en général AC contiendra toûjours autant de parties de *ac*, avec un reſte, que AB contiendra de parties de *ab*, avec un reſte.

De plus, ces reſtes comme nous venons de l'obſerver, feront de part & d'autre, d'autant plus petits, que

le nombre des parties de *ab* fera grand. Donc il fera permis de les négliger, fi on imagine la divifion de *ab* pouffée jufqu'à l'infini. Donc on pourra dire alors que le nombre des parties de *ac* que contiendra AC égalera le nombre des parties de *ab* que contiendra AB, & qu'ainfi AC fera à *ac*, comme AB à *ab*.

Donc nous avons rigoureufement démontré que lorfque deux triangles ont les mêmes angles, ils ont leurs côtés proportionnels, foit que leurs côtés ayent une commune mefure, ou qu'ils n'en ayent pas.

Les triangles & les figures femblables, ont leurs côtés proportionnels, lors même que ces côtés font incommenfurables.

La propofition (I. Part. Art. XLV.) d'où fe tire la proportionnalité des lignes qui fe répondent dans les figures femblables, fe juftifieroit de la même façon.

XXVIII.

On verra, par de pareils raifonnemens, que les propofitions expli-

quées dans les Articles XLIV. & XLVII. de la premiere Partie, où l'on a fait voir que les aires des triangles & des figures ſemblables, ont entr'elles la même proportion que les quarrés de leurs côtés homologues, ſont toûjours vraies en général, même lorſque les côtés de ces figures ſont incommenſurables.

Et ces figures ſont toûjours entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.

Prenons pour exemple les triangles ſemblables ABC, *abc*, dont nous ſuppoſerons les hauteurs incommenſurables avec leurs baſes; dans ce cas, il n'y aura aucun quarré, quelque petit qu'il ſoit, qui puiſſe ſervir de commune meſure à ces triangles, & aux quarrés faits ſur leurs baſes; c'eſt-à-dire, que les aires *abc* & *abde* ſeront incommenſurables entr'elles, ainſi que les aires ABC & ABDE; mais il n'en ſera pas moins vrai que le triangle ABC ſera au quarré ABDE, comme le triangle *abc* au quarré *abde*.

C'eſt de quoi on s'aſſurera, en obſer-

vant que plus les parties de l'échelle, dont on se servira pour mesurer AB & CK seront supposées petites, plus on approchera d'avoir les nombres qui exprimeront le rapport de ABC à ABDE. Donc divisant toûjours l'échelle du triangle *abc* dans le même nombre de parties, & négligeant les restes, on verra que les mêmes nombres serviroient toûjours à exprimer le rapport du triangle ABC au quarré ABDE, & celui du triangle *abc* au quarré *abde*. Qu'on pousse, par la pensée, la division des échelles jusqu'à l'infini, les restes deviendront absolument nuls; & l'on pourra dire, que les nombres qui exprimeroient le rapport du triangle *abc* au quarré *abde*, exprimeroient aussi le rapport du triangle ABC au quarré ABDE, & qu'ainsi le triangle *abc* sera au quarré *abde*, comme le triangle ABC au quarré ABDE.

Il en feroit de même de toutes les figures femblables.



Fig. I.

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

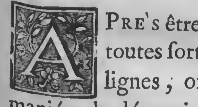
12



ELEMENS DE GEOMETRIE.

TROISIEME PARTIE.

De la mesure des figures circulaires, & de leurs propriétés.



PRE's être parvenu à mesurer toutes sortes de figures rectilignes, on a voulu avoir la maniére de déterminer celles que bornent des lignes courbes. Les Terrains, & en général, les espaces dont il s'agit de chercher la mesure, ne sont

pas toûjours terminés par des lignes droites.

Souvent les figures curvilignes, & les figures mixtes, c'est-à-dire, celles qui sont bornées par des lignes droites, & par des lignes courbes, peuvent se réduire à des figures entiérement rectilignes, comme nous l'avons déja dit ; car qu'on eût à mesurer une figure telle que ABCDEFG, on pourroit prendre le côté AD pour un assemblage de deux, de trois, &c. lignes droites, substituant en suite la droite FD à la courbe FED, on auroit la figure rectiligne ABCDFG, qui différeroit si peu de la figure mixte, que l'une pourroit être prise pour l'autre, sans erreur sensible.

Pl. VIII. Fig. 1.

On opéreroit donc sur ces figures, en suivant les méthodes précédentes : mais les Géométres ne s'accommoderoient guéres de ces sortes d'opérations ; ils n'en veulent que de rigoureuses : d'ailleurs, il y a tel cas, où

la transformation d'une figure curviligne, ou mixte, en une figure entiérement rectiligne, demanderoit qu'on partageât ſon contour en un ſi grand nombre de parties, qu'alors la méthode commune deviendroit impraticable ; auſſi ne ſeroit-on pas tenté de la ſuivre, ſi on avoit à meſurer un eſpace tel que Z (Fig. 7.), ou le cercle entier X (Fig. 3.), il faudroit prendre une autre voie pour trouver la meſure de ces ſortes d'eſpaces. Ici nous ne nous attacherons qu'à ceux dont les contours renferment des arcs de cercle.

I.

SUPPOSONS d'abord qu'on ait l'aire du cercle X à meſurer. On obſervera qu'en lui inſcrivant un poligone régulier BCDE &c. plus ce poligone aura de côtés, plus il approchera d'être égal au cercle. Or on a vû que l'aire de cette figure (I. Part. FIG. 3.

Art. XXII.) eſt égale à autant de fois le produit du côté BC par la moitié de l'apothéme AH, que le poligone a de côtés ; ou, ce qui revient au même, que cette aire a pour meſure le produit du contour entier BCDE &c. par la moitié de l'apothéme. Donc puiſqu'en pouſſant juſqu'à l'infini le nombre des côtés du poligone, ſon aire, ſon contour, ſon apothême ; égaleront l'aire, le contour & le rayon du cercle ; la meſure du cercle ſera le produit de ſa circonférence par la moitié de ſon rayon.

La meſure du cercle, eſt le produit de ſa circonférence par la moitié de ſon rayon.

II.

Fig. 4.

L'aire du cercle eſt égale à un triangle dont la hauteur eſt le rayon, & la baſe une droite égale à la circonfé-

Il ſuit de-là que la ſuperficie d'un cercle BCD, eſt égale à celle d'un triangle ABL, dont la hauteur ſeroit le rayon AB, & la baſe une droite BL égale à la circonférence.

III.

Il ne s'agit donc que d'avoir le

rayon & la circonférence. A l'égard du rayon, il eſt aiſé de le meſurer; il n'en eſt pas de même de la circonférence : cependant, pour avoir ſa meſure, on peut envelopper le cercle, d'un fil; ce qui dans beaucoup d'occaſions ſuffit pour la pratique.

Mais, juſqu'à préſent, on n'a pu parvenir à méſurer géométriquement la circonférence du cercle; c'eſt-à-dire, à déterminer exactement le rapport qu'elle a avec le rayon. On trouve ce rapport à des cent-milliémes, à des millioniémes près, & même on en approche tant qu'on veut, ſans que pour cela, on puiſſe le déterminer rigoureuſement.

IV.

L'APPROXIMATION la plus ſimple qu'on ait trouvée, eſt celle qu'on tient d'Archiméde. Le diamétre ayant 7 parties, ce que la circonférence contient de ces parties eſt entre

Le diamétre d'un cercle ayant 7 par-

ties, la circonférence en a près de 22.

21 & 22 ; & l'on ſçait qu'elle approche beaucoup plus de 22 que de 21.

V.

Au reſte, il eſt clair que ſi on ſçavoit exactement le rapport d'une ſeule circonférence à ſon rayon, on ſçauroit celui de toutes les autres circonférences à leurs rayons ; ce rapport devant être le même dans tous les cercles : propoſition qui paroît ſi ſimple, qu'elle n'a pas beſoin d'être démontrée, puiſqu'on ſent que quelles que fuſſent les opérations qu'on auroit faites pour méſurer une circonférence, en ſe ſervant des parties de ſon rayon, il faudroit qu'on fît les mêmes opérations, pour meſurer toute autre circonférence ; qu'ainſi, on lui trouveroit le même nombre de parties de ſon rayon.

Les circonférences des cercles, ſont entr'elles, comme leurs rayons.

VI.

Il eſt évident que les cercles ont encore la propriété générale de tou-

tes les figures ſemblables (I. Part. Art. XLVII.) ; je veux dire, que leurs ſurfaces ſont en même proportion que les quarrés de leurs côtés homologues : mais comme, pour appliquer cette propoſition aux cercles, on ne pourra prendre leurs côtés, il faudra ſe ſervir des rayons ; alors on verra que les cercles auront leurs aires proportionnelles aux quarrés de leurs rayons.

Les aires des cercles ſont proportionnelles aux quarrés de leurs rayons.

S'il ne paroiſſoit pas d'abord que cette propoſition dût ſuivre de ce qui eſt dit dans l'Article XLVII. de la premiere Partie, & qu'on voulût en avoir une démonſtration particuliere, on feroit attention qu'il reviendroit abſolument au même, de comparer les aires de deux cercles BCD, EFG, ou celles des triangles ABL, AEM, qui leur feroient égaux (Article II.) en ſuppoſant que leurs baſes BL & EM, fuſſent les développemens des circonférences BCD & EFG, & que leurs hauteurs fuſſent les rayons AB & AE.

Fig. 4. & 5.

Or par l'Article précédent, ces triangles seroient semblables ; donc leurs aires seroient en même proportion que les quarrés de leurs côtés homologues AB, AE, rayons des cercles BCD & EFG. Donc, &c.

VII.

Des trois cercles qui ont pour rayons les trois côtés d'un triangle rectangle, celui que donne l'hypotenuse vaut les deux autres pris ensemble.

Les cercles, à cause de leur similitude, auront aussi, de même que les figures semblables, cette propriété, que si, en prenant les trois côtés d'un triangle rectangle pour rayons, on décrit trois cercles, celui dont le rayon sera l'hypoténuse, égalera les deux autres pris ensemble.

Ainsi, on pourra toûjours trouver un cercle égal à deux cercles donnés, & cela sans prendre la peine de mesurer chacun de ces cercles. Qu'on veuille, par exemple, faire un bassin qui contienne autant d'eau que deux autres, la profondeur étant la même ; qu'on veuille trouver l'ouverture d'un tuyau

tuyau de fontaine, par lequel il s'écoule autant d'eau que par deux tuyaux donnés ; on y réussira sans peine, en prenant la voie que nous venons d'indiquer.

VIII.

Si on avoit à mesurer la superficie d'une couronne V, figure enfermée entre deux cercles concentriques EFG, BCD ; c'est-à-dire, entre deux cercles, qui auroient un centre commun ; ce qui se présenteroit d'abord, ce seroit de mesurer séparément les superficies des deux cercles, & de retrancher la plus petite de la plus grande. Mais il est aisé de s'appercevoir que le problême peut se résoudre d'une maniére plus commode pour la pratique.

FIG. 61

Une couronne est l'espace enfermé entre deux cercles concentriques.

Imaginons un triangle ABL, qui ait le rayon AB pour hauteur, & dont la base soit une droite BL, égale à la circonférence BCD. Si on méne par le

point E, la droite EM parallele à BL, cette droite ſera égale à la circonférence EFG; car à cauſe de la ſimilitude des triangles AEM, ABL, il y aura même proportion entre AB & BL, qu'entre AE & EM. Or par la ſuppoſition, BL égalera la circonférence dont AB ſera le rayon. Donc EM égalera auſſi la circonférence qui aura pour rayon la ligne AE, partie de AB. Il en ſeroit de même de toute autre ligne KI, parallele à BL; elle ſeroit toûjours égale à la circonférence dont AK ſeroit le rayon.

De l'égalité ſuppoſée entre la circonférence EFG, & la droite EM, ſuit néceſſairement l'égalité du triangle AEM au cercle EFG; donc il faut que l'eſpace rectiligne EBLM, ſoit égal à la couronne propoſée V. Or cet eſpace EBLM, ſe peut aiſément changer en un rectangle EBPH, en coupant ML en deux parties égales MI & IL, & en menant à BL par le point I

la perpendiculaire HIP, qui donnera le triangle ajoûté MHI, égal au triangle retranché PLI.

Donc si par le point I on méne à BL la parallele IK, qui coupera EB en deux parties égales, la couronne proposée, égale à l'espace EBLM ou à EBPH, aura pour mesure le produit de EB par KI, circonférence dont AK sera le rayon.

Donc pour mesurer une couronne V, il faut multiplier sa largeur EB par la circonférence KOQ, dite moyenne entre les circonférences BCD & EFG, parce qu'elle surpasse la petite circonférence EFG, ou la droite EM, d'une quantité MH, égale à PL, quantité dont elle est surpassée par la grande circonference BCD, ou par la droite BL.

Pour mesurer une couronne, il faut multiplier sa largeur par la circonférence moyenne.

IX.

Lorsqu'il s'agira de mesurer une figure Y, composée d'arcs de cercles

Fig. 2.

différens, & de lignes droites; ou une figure Z, uniquement composée d'arcs de cercles; toute la difficulté se réduira à mesurer des segmens de cercle; c'est-à-dire, des espaces tels que ABCE*, terminés par un arc ABC & par la corde AC. Car les figures entierement composées d'arcs de cercles, ou d'arcs & de lignes droites, peuvent toutes être considérées comme des figures rectilignes, augmentées ou diminuées de certains segmens.

Fig. 7.

Le segment de cercle est un espace terminé par un arc & par sa corde.

* Fig. 8.

La mesure de toutes les figures circulaires se réduit à celle du segment.

X.

La mesure d'un segment quelconque ABCE est facile à trouver, lorsqu'on sçait celle du cercle; car qu'on tire les lignes AT, CT, au centre T de l'arc, on formera une figure ABCT, appellée secteur, dont l'aire sera au cercle, comme l'arc ABC à la circonférence entiére, & qui, par conséquent, aura pour mesure le produit de la moitié du rayon AT par l'arc ABC:

Le secteur est une portion de cercle, terminée par deux rayons, & par l'arc qu'ils comprennent.

Sa mesure, & celle du segment.

or le secteur étant déterminé, il ne faudra plus qu'en retrancher le triangle ACT, pour avoir le segment ABCE.

XI.

COMME il arrive assez souvent que lorsqu'on se propose de mesurer une figure telle que Y, on n'a pas le centre de l'arc HIK, & que cependant, sans ce centre, on ne sçauroit mesurer la figure, puisque la méthode précédente exige la connoissance du rayon, il faut que nous cherchions le centre d'un arc de cercle quelconque. FIG. 2.

Trouver le centre d'un arc de cercle quelconque.

Soit ABC * l'arc de cercle proposé, si on prend à volonté deux points A & B sur cet arc, & que de ces points, comme centres, on décrive les quatre arcs *goi*, *foh*; *lpk*, *mpn*, les deux premiers, d'un rayon quelconque, & les deux autres, ou de ce même rayon, ou de tel autre rayon qu'on voudra ; il est clair que le centre cherché de l'arc ABC, sera sur la ligne *op*, qui join-

* FIG. 9.

dra les points d'interſections o, p.

Choiſiſſant enſuite un troiſiéme point C, ſur l'arc ABC, & ſe ſervant de B &de C, de la même maniere qu'on s'eſt ſervi de A & de B, on aura une droite *qr*, ſur laquelle devra encore ſe trouver le centre demandé. Donc ce centre ſera le point de rencontre T, des lignes *op*, *qr*,

XII.

AINSI, quelqu'arrangement qu'on donne à trois points, pourvû qu'on ne les place pas en ligne droite, on pourra toûjours les lier par un arc de cercle, ou, ce qui revient au même, quelle que ſoit la proportion des côtés
FIG. 10. AC, BC, d'un triangle ACB, avec ſa baſe, on pourra toûjours circonſcrire un cercle à ce triangle.

XIII.

LA méthode que nous venons de donner, pour circonſcrire un cercle à

un triangle, étant appliquée ſucceſſivement à différens triangles ACB, AEB, AGB, plus ou moins élevés à l'égard de leur baſe AB, on s'apperçoit qu'en paſſant d'un triangle ACB, dont l'angle au ſommet eſt fort aigu, à d'autres triangles AEB, AGB, dont l'angle au ſommet eſt plus ouvert; le centre du cercle circonſcrit s'approche continuellement de AB, & que ce centre paſſe enſuite au deſſous de AB, lorſque l'angle au ſommet AGB a atteint une certaine ouverture. Or voyant paſſer ce centre au deſſous de AB, après l'avoir vu au deſſus, il doit venir dans l'eſprit, ce me ſemble, de chercher de quelle eſpece eſt le triangle AFB, lorſque le cercle circonſcrit a ſon centre ſur AB même. Fig. 11. Fig. 12.

Pour connoître ce triangle AFB, on commencera par remarquer que dans ce cas particulier, la portion du cercle circonſcrite au triangle doit être exactement un demi-cercle: en effet,

le centre du cercle devant ſe trouver ſur la baſe AB, dont les deux extrémités ſont, par la ſuppoſition, dans la circonférence, le centre M ne pourra pas manquer d'être ſitué préciſément au milieu de AB, de ſorte que AB ſera néceſſairement un diamétre.

Si d'un point quelconque de la circonférence d'un demi-cercle, on tire deux droites aux extrémités du diamétre, on aura un angle droit.

On verra enſuite que de quelque point F du demi-cercle, qu'on tire les lignes FA, FB, l'angle AFB ſera droit, Car menant FM, les deux triangles AFM, MFB, ſeront iſocéles; donc les deux angles AFM, MFB, ſeront reſpectivement égaux aux angles FAM, FBM, ou, ce qui revient au même, l'angle total AFB égalera la ſomme des deux angles FAM, FBM; mais les trois angles AFB, FAM, FBM, pris enſemble, valent deux droits. Donc l'angle AFB ſera droit.

Ainſi, ſi on décrit ſur la baſe AB, un triangle rectangle quelconque, ce triangle aura la propriété demandée, d'être inſcrit dans un cercle dont le centre eſt ſur la baſe.

XIV.

CETTE propriété du cercle, que l'angle, qui a son sommet dans la demi-circonférence, & qui est appuyé sur le diamétre, est toûjours droit, porte à chercher si les autres parties du cercle n'auroient pas quelque propriété analogue ; si, par exemple, les angles ACB, AEB, AFB, pris dans un segment ACEFB, ne feroient pas tous égaux entr'eux, ainsi que le sont ceux du demi-cercle. PL. IX. FIG. 1.

Pour nous en assurer, nous commencerons par chercher la valeur d'un de ces angles, & nous verrons ensuite si les autres ont la même valeur. Nous prendrons par exemple, l'angle AEB, dont le sommet E est placé au milieu de l'arc AEB. Comme la ligne EDG, qui passe par le centre D, coupe cet angle en deux parties égales, il suffira de mesurer l'angle AEG sa moitié, ou, ce qui revient au même, il suffira de FIG. 2.

de sçavoir quelle partie l'angle AEG est d'un angle déja mesuré, tel que ADG ; je dis que l'angle ADG est déja mesuré, parce que nous sçavons que l'arc AG est sa mesure (I. Part. Art. LII.).

Si on fait attention que le triangle AED est isocéle, on verra facilement que l'angle AEG est la moitié de l'angle ADG ; car les angles AED, EAD (I. Part. Art. XXXI.) sont égaux : mais (I. Part. Art. LXVIII.) ces deux angles, pris ensemble, valent l'angle extérieur ADG. Donc l'angle AED ou AEG, est la moitié de l'angle ADG.

Par la même raison, l'angle DEB sera la moitié de l'angle GDB. Donc l'angle total AEB égalera la moitié de l'angle ADB. Donc sa mesure sera la moitié de l'arc AGB.

XV.

L'ANGLE AEB étant mesuré, pour sçavoir s'il est égal à chacun des

autres angles qui ont leur ſommet dans le même ſegment, il faut examiner ſi un de ces angles pris à volonté, AFB par exemple, eſt auſſi la moitié de l'angle au centre ADB. On s'en aſſurera facilement, en tirant la droite FDG par le centre. Car alors on verra que l'angle AFB ſera compoſé de deux autres AFD, DFB, qui ſeront, par l'Article précédent, les moitiés des angles ADG, GDB, d'où l'on conclura que l'angle total AFB ſera la moitié de l'angle ADB; & en appliquant le même raiſonnement à tous les angles ACB, AEB, AFB, qui ont leurs ſommets à la circonférence, & qui s'appuient ſur le même arc AGB, on pourra conclure que ces angles ſont égaux entr'eux, ainſi que nous l'avions ſoupçonné dans l'Article précédent.

FIG. 3.

Tous les angles dont le ſommet eſt à la circonférence, & qui s'appuient ſur le même arc, ſont égaux, & ont, pour commune meſure, la moitié de l'arc ſur lequel ils s'appuient.

FIG. 1.

XVI.

PARMI les différens angles qui ont leur ſommet dans l'arc ACEFB, il y

en a qui pourroient d'abord ne pas paroître compris dans la démonſtration
Fig. 4. précédente ; ce ſont des angles AFB, tels, que la droite FDG tirée par le centre, paſſe hors de l'angle ADB. Cependant, en remarquant toûjours que l'angle DFA eſt la moitié de l'angle GDA, & l'angle DFB, la moitié de l'angle GDB, on verra que l'angle AFB, excès de l'angle DFB ſur l'angle DFA, ſera, dans ce cas, la moitié de l'angle ADB, excès de l'angle GDB ſur GDA.

XVII.

PAR les figures dont nous nous ſommes ſervis, il ſembleroit auſſi que la démonſtration précédente ne conviendroit qu'aux ſegmens plus grands qu'un demi-cercle ; mais il eſt aiſé de voir qu'un angle quelconque, tel que
Fig. 5. AFB, qui auroit ſon ſommet dans un ſegment plus petit qu'un demi-cercle, ſeroit toûjours compoſé de deux autres

DFB, DFA, moitiés des angles BDG, ADG, & par conséquent, que cet angle AFB auroit pour mesure la moitié des deux arcs BG, AG, c'est-à-dire, la moitié de l'arc AGB.

XVIII.

APRE'S avoir vu que dans un même segment, les angles AEB, AFB, AHB, supposés à la circonférence, sont tous égaux, on est tenté de chercher ce que devient l'angle AQB, lorsque son sommet se confond avec le point B, extrémité de la base AB. Cet angle s'évanoüiroit-il alors? Mais il ne paroît pas possible que sans s'être resserré par dégrés, il vienne tout-à-coup à s'anéantir. On ne voit pas quel seroit le point au-delà duquel cet angle cesseroit d'exister: comment donc parviendra-t-on à en trouver la mesure? c'est une difficulté qu'on ne peut résoudre, sans recourir à la Géometrie de l'infini, dont tous les hommes ont, FIG. 6.

au moins, une idée imparfaite, qu'il ne s'agit que de développer.

Obſervons d'abord, que quand le point E s'approche de B, en devenant F, H, Q, &c., la droite EB s'accourcit continuellement, & que l'angle EBA qu'elle fait avec la droite AB, s'ouvre de plus en plus. Mais quelque courte que devienne la ligne QB, l'angle QBA n'en ſera pas moins un angle, puiſque pour le rendre ſenſible, il ne faudroit que prolonger la ligne accourcie QB vers R; en doit-il être de même, lorſque la ligne QB, à force de diminuer, s'eſt réduite enfin à zero? qu'eſt devenuë alors ſa poſition? qu'eſt devenu ſon prolongement?

Il eſt évident qu'il n'eſt autre choſe que la droite BS, qui touche le cercle en un ſeul point B, ſans le rencontrer en aucun autre endroit, & que, pour cette raiſon, on appelle tangente.

La tangente au cercle, eſt la ligne qui

De plus, il eſt clair que pendant que la ligne EB diminuë continuellement

jusqu'à s'anéantir à la fin, la droite AE, qui devient successivement AF, AH, AQ,&c. s'approche toûjours de AB, & qu'elle se confond enfin avec elle. Donc l'angle à la circonférence AEB, après être devenu AFB, AHB, AQB, devient en dernier lieu l'angle ABS, fait par la corde AB, & par la tangente BS, & cet angle, qu'on appelle angle au segment, doit toûjours conserver la propriété d'avoir pour mesure la moitié de l'arc AGB.

ne le touche qu'en un point.

L'angle au segment est celui qui est fait par la corde & par la tangente.

Sa mesure est la moitié de l'arc du segment.

Quoique cette démonstration soit peut-être un peu abstraite pour les Commençans, j'ai cru à propos de la donner, parce qu'il sera très-utile à ceux qui voudront pousser leurs études jusqu'à la Géométrie de l'infini, de s'être accoutumé de bonne heure à de pareilles considérations.

Si cependant les Commençans trouvoient cette démonstration au-dessus de leurs forces, il est aisé de les mettre à portée d'en découvrir une autre, en

leur expliquant la principale propriété des tangentes.

XIX.

Fig. 7.

La tangente eſt perpendiculaire au diamétre qui paſſe par le point d'attouchement.

Cette propriété eſt qu'une tangente au cercle dans un point quelconque B, doit être perpendiculaire au diamétre IDB, qui paſſe par ce point. Car comme la courbure du cercle eſt ſi uniforme qu'un diamétre quelconque IDB, le partage en deux demi-cercles IAB, IOB, égaux & également ſitués à l'égard de ce diamétre, il faut que les deux parties BS, BH, de la tangente commune à ces deux demi-cercles, ſoient auſſi également ſituées à l'égard de ce diamétre : or cela ne ſçauroit être ſans que IDB ne ſoit perpendiculaire à la tangente HBS.

XX.

De la on verra facilement pourquoi l'angle au ſegment ABS, a pour meſure la moitié de l'arc AGB.

Car

Car l'angle ADB, joint avec les deux angles égaux DAB, DBA, fait (I. Part. Art. LXIV.) deux droits. Donc la moitié de l'angle ADB, joint avec l'angle DBA fait un droit. Mais l'angle DBA, ajoûté avec l'angle ABS, donne auſſi un droit. Donc l'angle ABS eſt égal à la moitié de l'angle ADB. Donc la meſure de ABS ſera la moitié de l'arc AGB.

XXI.

La ſeconde démonſtration que nous venons de donner de cette propriété du cercle, que l'angle ABS a pour meſure la moitié de l'arc AGB, fournit la ſolution du problême ſuivant.

Fig. 8. & 9.

Ce que c'eſt qu'un ſegment capable d'un angle donné.

Décrire ſur AB un ſegment de cercle capable de l'angle donné L ; c'eſt-à-dire, un ſegment AFB, dans lequel tous les angles AFB à la circonférence, ſoient égaux à l'angle L.

Maniére de faire un ſegment capable

Pour réſoudre ce problême, il faudra faire en A & en B, les angles BAS

d'un angle donné.

& ABS, chacun égal à l'angle L; & élever ſur AS & ſur BS, les deux perpendiculaires AD & BD; leur rencontre D ſera le centre de l'arc cherché AFB.

Car par l'Article XIX. les droites BS & AS feront les tangentes du cercle dont le centre eſt D, & le rayon AD ou BD, puiſque BD ou AD ſont perpendiculaires à BS & à AS. De plus, par l'Article précédent, l'angle ABS a pour meſure la moitié de AGB, & par l'Article XV. les angles tels que AFB, ſont auſſi meſurés par la moitié de AGB. Donc ces angles AFB feront égaux à ABS; c'eſt-à-dire, à l'angle L, ainſi qu'on le demandoit.

XXII.

La découverte des propriétés des ſegmens de cercle, que nous venons d'expliquer, eſt due vraiſemblablement à la ſimple curioſité des Géométres; mais il en a été de cette découverte,

comme il en eſt tous les jours de beaucoup d'autres, ce qu'on ne croyoit pas d'abord utile, le devient par la ſuite; on a fait dans la pratique, des applications fort heureuſes des propriétés du cercle, que nous venons de démontrer. Je ne donnerai qu'une ſeule de ces applications; on la trouvera dans la ſolution du problême ſuivant, qui eſt ſouvent néceſſaire dans la Geographie.

A, B, C, ſont trois lieux dont on connoît les diſtances reſpectives AB, BC, AC; il s'agit de ſçavoir à quelle diſtance de ces lieux, eſt un point D, d'où l'on peut les voir tous les trois; mais d'où l'on ne peut ſortir pour opérer ſur le terrain.

FIG. 10.

Trouver la diſtance d'un lieu à trois autres dont les poſitions ſont connues.

On commencera par tracer ſur le papier trois points *a*, *b*, *c*, qui ſoient ſitués entr'eux de la même maniére que les trois points A, B, C, c'eſt-à-dire en langage géométrique, qu'on fera le triangle *abc* ſemblable au triangle ABC,

FIG. 10. & 11.

Ayant obſervé enſuite avec le demi-cercle la grandeur des angles ADB, BDC, on fera ſur *ab*, le ſegment de cercle *bda*, capable de l'angle ADB, & ſur la droite *bc*, le ſegment de cercle *bdc*, capable de l'angle BDC, la rencontre *d* de ces deux ſegmens déſignera ſur le papier la poſition du lieu D, c'eſt-à-dire, que les lignes *da*, *db*, *dc*, ſeront en même proportion à l'égard de *ab*, *bc*, *ac* ; que les diſtances cherchées DA, DB, DC, à l'égard des diſtances données AB, BC, AC : ce qui n'a pas beſoin de démonſtration, après ce qu'on a vû ſur les figures ſemblables.

XXIII.

ON pourroit facilement faire voir que la pratique a tiré bien d'autres ſecours des propriétés du cercle, qu'on vient de démontrer ; mais il eſt plus à propos de paſſer à d'autres propriétés du cercle, qui ont été tirées des pré-

cédentes, & qui ont eu auſſi leur utilité.

Pour procéder par ordre à la découverte de ces propriétés, nous commencerons par remarquer que deux angles quelconques EDC, EBC, qui s'appuient ſur le même arc EC, étant égaux, il s'enſuit que les triangles DAE, BAC, ont les mêmes angles; c'eſt-à-dire, (I. Part. Art. XXXIX.) que ces triangles ſont ſemblables. PL. X. FIG. I.

Car par la même raiſon que l'angle EDC eſt égal à l'angle EBC, l'angle DEB ſera égal à l'angle DCB; & quant aux angles DAE, BAC, ils ſeront viſiblement égaux; ſoit parce qu'ils ſont faits des mêmes lignes, ſoit parce que deux triangles, dont l'un a deux angles reſpectivement égaux, à deux angles de l'autre, ont auſſi néceſſairement le 3me. angle égal (I. Part. Art. XXXVIII.)

Pour reconnoître plus facilement enſuite dans les triangles ADE, ABC, les propriétés générales des triangles

semblables, nous appliquerons le triangle DAE sur le triangle BAC, en posant AD sur AB, & AE sur AC, afin que DE soit paralléle à BC. Nous nous rappellerons alors,

Fig. 1. & 2.

1°. Que si deux triangles ADE, ABC, sont semblables, les quatre côtés AC, AE, AB, AD, sont en proportion; (I. Part. Art. XXXIX.)

2°. Que dans toute proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens (II. Part. Art. VIII.) & nous conclurons de-là, que le rectangle ou le produit de AC par AD, est égal au rectangle de AE par AB; propriété du cercle, très remarquable, & qu'on peut énoncer ainsi : Si dans un cercle on tire à volonté deux droites qui se coupent, le produit des deux parties de la premiere est égal au produit des deux parties de l'autre.

Deux cordes se coupant dans un cercle, le rectangle des parties de l'une est égal au rectangle des parties de l'autre.

XXIV.

Fig. 3.

Si les deux droites BE, DC, se

coupoient perpendiculairement, & que l'une de ces deux droites fût un diamétre DC, il eſt clair que les deux parties AB, AE, de l'autre droite BE, ſeroient égales entr'elles ; de ſorte que la propriété précédente s'énonceroit ainſi dans ce cas particulier. Si ſur le diamétre DC d'un cercle, on éleve une perpendiculaire quelconque AB, le quarré de cette perpendiculaire ſera égal au rectangle de AD par AC.

Le quarré d'une perpendiculaire quelconque au diamétre d'un cercle, eſt égal au rectangle des deux parties du diamétre.

XXV.

Changer un rectangle en un quarré.

Fig. 4.

Il arrive ſouvent qu'on a beſoin de changer un rectangle en un quarré, l'Article précédent en fournit un moyen facile : ſoit ACFE le rectangle propoſé, on prolongera AC en D, de ſorte que AD ſoit égal à AE, & l'on décrira le demi-cercle DBC, dont le diamétre ſoit DC. Prolongeant enſuite le côté EA juſqu'à ce qu'il rencontre le demi-cercle, on aura AB pour le côté

du quarré cherché ABGH, égal au rectangle donné AFCE.

XXVI.

Ce que c'est qu'une moyenne proportionnelle entre deux lignes droites.

On propose souvent un problême qui n'est que celui que nous venons de résoudre, présenté autrement. C'est de trouver une ligne qui soit moyenne proportionnelle entre deux lignes données; on entend alors par la moyenne proportionnelle, la ligne qui est aussi grande, par rapport à la plus petite des deux lignes données, qu'elle est petite par rapport à la plus grande; c'est-à-dire, que si AB, par exemple, est moyenne proportionnelle entre AD & AC, on pourra dire que AD est à AB, comme AB est à AC. Or il est bien aisé de voir que ce problême est le même que le précédent, puisque (II. Part. Art. VIII.) le produit de AD par AC, c'est-à-dire, le rectangle de ces deux lignes, sera égal au produit

de AB par AB, c'eſt-à-dire, au quarré de AB.

Donc lorſqu'on voudra trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données, on changera le rectangle de ces deux lignes en un quarré dont le côté ſera la ligne cherchée. Maniére de la trouver.

XXVII.

ON peut encore trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes, d'une autre maniére qui ſuit de la proprieté du cercle expliquée dans l'Article XIII. Suppoſons que AC ſoit la plus grande des deux lignes données, & AD la plus petite, on élevera DB perpendiculairement ſur AC, & le point B, où elle rencontrera le demi-cercle ABC, tracé ſur le diamétre AC, donnera la ligne AB, moyenne proportionnelle entre AD & AC. Car en tirant BC, il eſt clair que le triangle ABC ſera rectangle en B. Donc (I. Part. Art. XXXVIII.) ce triangle ſera ſemblable

Autre maniére.

FIG. 5.

au triangle ABD, puiſque ces deux triangles ont d'ailleurs l'angle A de commun; mais ſi les triangles ADB & ABC ſont ſemblables, ils ont leurs côtés proportionnels. Donc AD eſt à AB, comme AB à AC. Donc AB eſt moyenne proportionnelle entre AD & AC.

XXVIII.

Changer une figure rectiligne en un quarré.

SI on vouloit changer une figure rectiligne quelconque en un quarré, il ne faudroit, pour ramener ce problême à l'Article XXV. que faire de cette figure un rectangle; ce qui ſeroit fort facile, à cauſe que les figures rectilignes ne ſont que des aſſemblages de triangles, que chaque triangle eſt la moitié d'un rectangle qui a même baſe & même hauteur, & que tous les rectangles provenus des triangles, ne feront plus qu'un ſeul rectangle, en leur donnant à tous une hauteur commune (II. Part. Art. VI.)

XXIX.

Les figures dont les contours renfermeront des arcs de cercle, pourront auſſi être changées en quarrés, lorſqu'on aura meſuré par pratique la longueur des arcs dont elles ſeront compoſées ; car on pourra alors changer ces figures, ainſi que les rectilignes, en rectangles ; on aura recours pour cela aux Articles IX. & X. où l'on a appris à meſurer toutes ſortes de figures circulaires.

XXX.

Faire un quarré qui ſoit à un autre en raiſon donnée.

On tire encore de la propriété du cercle, expliquée dans l'Article XXIV. une méthode bien facile pour faire un quarré qui ſoit à un quarré donné, en raiſon donnée, problême que nous avions promis dans l'Article XXII. de la ſeconde Partie.

Suppoſons, par exemple, qu'on ſe propoſe de faire un quarré qui ſoit au

Fig. 6. quarré ABCD, comme la ligne M à la ligne N; on divisera (I. Part. Art. XLI.) le côté CB au point E, de maniére que CB soit à BE comme la ligne N à la ligne M; menant ensuite la paralelle EF à AB, le rectangle ABEF, aura la même superficie que le quarré demandé; donc il ne s'agira plus que de changer ce rectangle en un quarré.

XXXI.

Fig. 7. & 8.

Faire un poligone qui soit en raison donnée avec un poligone semblable.

Si on veut faire un poligone HIKLM, qui soit à un poligone semblable ABCDE, dans la raison de la ligne X à la ligne Y, on commencera par faire sur le côté AB du poligone donné ABCDE, le quarré ABGF, ensuite on cherchera un autre quarré HIOQ, qui soit au quarré ABGF, comme la ligne X à la ligne Y. Et alors décrivant sur le côté HI de ce quarré un poligone HIKLM, semblable au premier ABCDE, ce nouveau poli-

gone ſera celui qu'on demande. La raiſon en eſt bien facile à trouver, ſi on ſe rappelle (I. Part. Art. XLVIII.) que les figures ſemblables ſont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.

XXXII.

Faire un cercle, qui ſoit à un autre cercle en raiſon donnée.

Si on vouloit faire un cercle dont l'aire fût à celle d'un cercle donné, comme X à Y, il faudroit conſtruire un quarré, qui fût au quarré du rayon de ce premier cercle, comme X à Y, & le côté de ce nouveau quarré ſeroit le rayon du cercle demandé.

XXXIII.

Voici encore une propriété du cercle tirée de celle qui a fourni les problêmes précédens.

Fig. 9.

Si d'un point pris hors d'un cercle, on tire deux ...

Si d'un point A, pris hors d'un cercle, on méne à volonté deux droites ABC, ADE, qui coupent, chacune, la circonférence en deux points,

lignes qui le traverſent, les rectangles de ces deux droites par leurs parties extérieures ſeront égaux.

& qu'on méne les droites CD, BE, les triangles ACD, AEB, feront ſemblables, puiſque l'angle A eſt commun aux deux triangles, & qu'ils ont d'ailleurs les angles à la circonférence C & E, égaux. Or de ce que les triangles CAD, EAB, ſont ſemblables, il s'enſuit que les quatre lignes AB, AD, AE, AC, ſont en proportion, & par conſéquent, que le rectangle des deux droites AB, AC, eſt égal au rectangle des deux droites AD, AE, ce qui peut s'exprimer ainſi. Si d'un point quelconque A, pris hors d'un cercle, on tire à volonté deux lignes droites AC, AE, qui traverſent ce cercle, le rectangle de la droite AC par ſa partie extérieure AB, ſera égal au rectangle de la droite AE par ſa partie extérieure AD.

XXXIV.

Lorsque la droite qui part du point A, au lieu de couper le cercle, ne fait ſimplement que le toucher,

ainſi que AF, la propriété précédente ſe change en celle-ci: le quarré d'une tangente AF, eſt égal au rectangle produit par la ſecante quelconque AE, & par ſa partie extérieure AD. Ce qui eſt bien aiſé à démontrer. Car regardant la droite AF qui touche le cercle, comme une ligne qui le couperoit en deux points infiniment proches, les lignes AB, AC, ne ſont alors qu'une même ligne AF, & au lieu du rectangle de AB, par AC, on a le quarré de AF.

Le quarré de la tangente eſt égal au rectangle de la ſecante par ſa partie extérieure.

XXXV.

La propoſition démontrée dans l'Article précédent, en nous apprenant la valeur du quarré de la tangente AF, ne nous apprend pas à tirer cette tangente du point donné A. Pour la tirer, on ſe reſſouviendra, (Art. XIX.) que le rayon FG eſt perpendiculaire à la tangente FA. Ainſi il ne s'agit que de trouver, ſur le cercle donné, le point F, tel que l'angle AFG

FIG. 10.

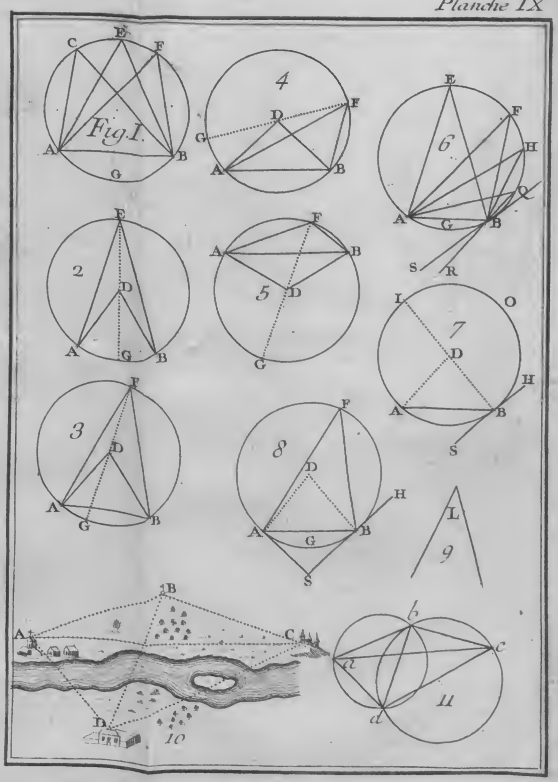
D'un point donné hors d'un cercle, lui mener une tangente.

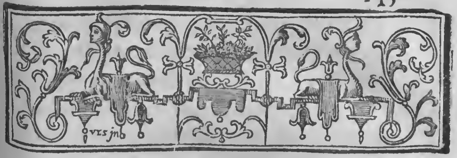
ſoit droit. Donc, en décrivant ſur AG un demi cercle, le point où il coupera le cercle FKO ſera (Article XIII.) le point cherché F.



Planche VIII

Planche IX





ELEMENS DE GEOMETRIE.

QUATRIEME PARTIE.

De la maniére de mesurer les solides, & leurs surfaces.

Es Principes que nous avons établis dans les trois premieres Parties de cet Ouvrage, pourroient nous suffire pour résoudre des problêmes beaucoup plus difficiles que ceux que nous allons nous proposer ; mais il est plus dans l'ordre

que nous avons ſuivi précédemment ; de paſſer maintenant à la meſure des ſolides ; c'eſt-à-dire, des étendues terminées, qui ont à la fois trois dimenſions, longueur, largeur, & profondeur.

Cette recherche a été, ſans doute, un des premiers objets qui ait pû fixer l'attention des Géométres. On aura voulu ſçavoir, par exemple, combien il y avoit de pierres de taille dans un mur dont la hauteur AD, la largeur AB, & la profondeur ou épaiſſeur BG étoient connuës. On ſe ſera propoſé de déterminer la quantité d'eau que contenoit un foſſé, ou un réſervoir ABCD ; on aura voulu trouver la ſolidité d'une Tour, d'une obéliſque, d'une maiſon, d'un clocher, &c.

PL. XI. FIG. 1. FIG. 2.

Pour traiter les figures qui ont les trois dimenſions, de la même maniére que nous avons traité de celles qui n'en ont que deux, nous commencerons par examiner les ſolides qui ſont terminés par des plans.

Nous n'aurons pas besoin de parler de la maniére de mesurer les surfaces de ces corps, elles ne peuvent être que des assemblages de figures rectilignes ; & par conséquent, leur mesure dépend de ce qui a été dit dans la premiere Partie.

I.

POUR mesurer la solidité des corps, il est naturel de les rapporter tous au solide le plus simple, ainsi que pour mesurer les surfaces, on les a toutes rapportées au quarré. Or le solide le plus simple, c'est le cube, qui est en effet, en solide, ce que le quarré est en superficie ; c'est-à-dire que c'est un espace tel que *abcdefgh*, dont la longueur, la largeur & la profondeur sont égales, ou, ce qui revient au même, c'est une figure terminée par six faces égales qui sont des quarrés.

Le cube est une figure solide terminée par six quarrés. C'est la mesure commune des solides.

FIG. 3.

On appelle côté du cube le côté des quarrés qui lui servent de faces.

Par un pied cube, on entend un cube, dont le côté eſt d'un pied ; de même un pouce cube, eſt un cube dont le côté eſt d'un pouce, &c.

II.

Les ſolides qu'on a le plus communément à meſurer, ſont des figures ABCDEFGH terminées par ſix faces rectangles ABCD, CBGF, CFED, DEHA, GFEH, ABGH. On appelle ces ſolides des Parallelipipédes, parce que leurs faces oppoſées conſervant dans tous leurs points la même diſtance l'une de l'autre, ſont dites parallèles, de même que les lignes ont auſſi été nommées paralléles, lorſqu'elles conſervoient par tout la même diſtance.

Fig. 1.

Le parallelipipéde, eſt un ſolide terminé par ſix rectangles.

Les plans paralléles, ſont ceux qui conſervent toûjours entr'eux la même diſtance.

III.

Or ſi on ſe propoſe de meſurer des ſolides de cette eſpéce, l'analogie de ce problême avec celui où il s'eſt agi de la meſure des ſurfaces rectangles,

donnera un moyen facile de le résoudre.

Mesure du parallelipipede.

On commencera par mésurer séparément la longueur AD, la largeur AB & la profondeur BG de la figure proposée, soit en pieds, soit en pouces, &c. on multipliera ensuite l'un par l'autre les trois nombres qu'on aura trouvés, & le produit qui viendra de cette multiplication exprimera combien le parallelipipéde contiendra de pieds cubes, ou de pouces cubes, &c. suivant que les dimensions auront été mesurées en pieds, ou en pouces, &c. Pour mieux montrer comment se fait cette opération, nous allons en donner un exemple.

Supposons que la longueur AD soit de 6 pieds, la largeur AB de 5, & la profondeur BG de 4, le rectangle ABCD (I. Part. Art. XI.) aura 6 fois 5 ou 30 pieds quarrés. Si on imagine ensuite que les lignes BG, CF, DE, AH, qui mesurent toutes également la

profondeur du ſolide, ſoient partagées chacune en quatre parties égales, & que par les points de diviſion correſpondans, on faſſe paſſer autant de plans paralléles les uns aux autres, ces plans diviſeront le parallelipipéde propoſé, en quatre autres parallélipipédes, qui auront chacun un pied de profondeur, & qui ſeront tous égaux & ſemblables. Or l'inſpection ſeule de la figure fait voir que le premier de ces parallelipipédes contient 30 pieds cubes, puiſque ſa face extérieure ABCD contient 30 pieds quarrés. Donc le ſolide total ABCDEFGH contiendra 4 fois 30 ou 120 pieds cubes.

IV.

Nous ne nous arrêterons point à expliquer les différents moyens qu'on peut employer dans la pratique pour conſtruire des parallelipipédes, parce que ces moyens ſont, pour la plûpart, ſi aiſés à trouver, qu'il n'y a perſonne

qui ne les puiſſe imaginer. Mais nous donnerons la formation ſuivante du parallelipéde, qui eſt plus utile à conſidérer que toutes les autres.

On conçoit qu'un quarré ou un rectangle ABGH ſe meuve parallélement à lui-même, enſorte que ſes quatre angles A, B, G, H, parcourent chacun une des quatre lignes AD, BC, GF, HE, perpendiculaires au plan du rectangle ABGH.

Les parallelipipédes ſont produits par un rectangle qui ſe meut parallélement à lui-même.

V.

Il eſt preſque inutile d'avertir que par une ligne perpendiculaire à un plan, nous entendons une ligne qui ne panche d'aucun côté ſur ce plan, & de même qu'un plan qui ne panche pas plus d'un côté que d'un autre ſur un ſecond plan, eſt dit perpendiculaire à ce ſecond plan; ces deux définitions ſont analogues à celle que nous avons donnée d'une ligne perpendiculaire à une autre ligne.

La ligne perpendiculaire à un plan, eſt celle qui ne panche d'aucun côté ſur ce plan.

Il en eſt de même du plan perpendiculaire à un autre plan.

VI.

Fig. 4. Or il ſuit de-là que la ligne AB, qui eſt perpendiculaire au plan X doit être perpendiculaire à toutes les lignes AC, AD, AE, &c. qui partent du pied A de cette ligne, & qui ſont dans ce plan. Car il eſt évident que ſi elle panchoit ſur une de ces lignes, elle ſeroit inclinée vers quelque côté du plan. Donc elle ne lui ſeroit pas perpendiculaire.

La ligne qui eſt perpendiculaire à un plan, eſt perpendiculaire à toutes les lignes de ce plan, qui partent du point où elle tombe.

VII.

Pour ſe repréſenter d'une façon bien ſenſible, comment la ligne AB peut être perpendiculaire à toutes les lignes qui partent de ſon extrémité A, on n'aura qu'à faire une figure en relief de la maniére ſuivante.

On conſtruira de quelque matiere unie & facile à plier comme du carton, un rectangle FGDE, partagé en deux parties égales par la droite AB,

Fig. 5.

perpendiculaire aux côtés ED, FG; on pliera enſuite ce rectangle, en ſorte que le pli ſoit le long de la ligne AB, & on le portera tout plié ſur le plan X. Fig. 6. Il eſt évident que quelle que ſoit l'ouverture qu'on donne aux deux parties FBAE, GBAD du rectangle plié EAD GBF, ces deux parties reſteront toûjours appliquées ſur le plan X, ſans que la ligne AB change de poſition par rapport à ce plan, cette droite AB ſera donc perpendiculaire à toutes les lignes qui partent de ſon pied, & qui ſeront dans le plan X, puiſque les côtés AE, AD du rectangle plié s'appliqueront ſucceſſivement ſur chacune de ces lignes par le mouvement que nous venons de décrire.

VIII.

On tire de la conſtruction précédente une pratique bien commode, pour élever d'un point donné ſur un plan, une ligne perpendiculaire à ce

plan, ou pour abbaiſſer d'un point pris hors d'un plan, une ligne qui ſoit perpendiculaire à ce plan. Car que le point propoſé ſoit dans le plan, en A par exemple, ou qu'il ſoit hors du plan, comme en H, on pourra toûjours faire avancer le rectangle EFBGDA ſur le plan X, jusqu'à ce que le pli AB touche le point donné, & AB deviendra, dans les deux cas, la perpendiculaire demandée.

FIG. 7.

Pratique ſimple pour élever, ou pour abbaiſſer des lignes perpendiculaires à des plans.

IX.

IL ſuit auſſi de-là qu'une ligne AB ſera perpendiculaire à un plan X, toutes les fois qu'elle ſera perpendiculaire à deux lignes AE & AD de ce plan. Car alors AB pourra être regardée comme le pli d'un rectangle dont l'un des côtés pliés s'appliqueroit ſur AE, & l'autre ſur AD. Or ce pli ne pourroit manquer d'être perpendiculaire au plan X.

Une ligne ſera perpendiculaire à un plan, ſi elle eſt perpendiculaire à deux lignes de ce plan, qui partent du point où elle tombe.

X.

SI on veut élever ſur une ligne

quelconque KL, un plan perpendiculaire au plan X dans lequel eſt cette ligne, on pourra ſe ſervir encore, pour cela, du rectangle plié GBFEAD. Car il ne faudra que poſer ſur la ligne KL le côté AD d'une des parties ADGB de ce rectangle plié, & le plan de cette partie ADGB, ſera celui qu'on demande.

Maniére d'élever un plan perpendiculaire à un autre.

XI.

On verra facilement que ſi on poſoit un troiſiéme plan Y ſur les deux côtés FB & BG du même rectangle plié, ce plan Y ſeroit encore perpendiculaire à la ligne AB, & par conſéquent, paralléle au plan X.

Fig. 8.

Donc ſi à un plan X on éleve trois perpendiculaires EF, AB, DG, d'égale longueur, le plan Y, qui paſſera par les trois points F, B, G, ſera paralléle au plan X.

Mener un plan paralléle à un autre.

XII.

Lorsque deux plans ne ſeront

pas paralléles, il ſera facile de connoître l'angle qu'ils feront entr'eux, en ſe ſervant encore de notre rectangle plié. Pour en venir à bout, nous appliquerons l'une des deux parties ABGD de ce rectangle, ſur le plan X ; il eſt évident que l'angle EAD, ou ſon égal FBG, meſurera l'inclinaiſon du plan EABF ſur le plan DABG. Or ſi on remarque que AB eſt la commune ſection de ces plans, & que EA & AD ſont chacune perpendiculaires à AB, on en tirera ſans peine la régle ſuivante.

FIG. 9.

Meſurer l'inclinaiſon d'un plan ſur un autre.

Deux plans qui ne ſont pas paralléles étant donnés, il faut commencer par trouver la ligne droite, qui eſt leur commune ſection; enſuite d'un point quelconque de cette ligne, on lui menera deux perpendiculaires, qui ſoient chacune dans un de ces plans, & l'angle que feront entr'elles ces deux perpendiculaires, meſurera l'angle que les deux plans donnés font entr'eux.

XIII.

COMME on s'apperçoit, sans peine, que pendant le mouvement de ABFE, autour du pli AB, la droite AE, dont l'extrêmité E décrit un arc de cercle ED, ne sort jamais d'un plan EAHD, perpendiculaire au plan X, & que l'inclinaison de la droite EA sur le plan X n'est autre chose que l'angle EAD, on découvre encore très-facilement que l'inclinaison d'une droite quelconque EA sur le plan X, est mésurée par l'angle EAH fait entre cette ligne & la ligne AD, qui passe par A & par le point H du plan X, où tombe la perpendiculaire EH, abbaissée sur ce plan, d'un point quelconque E de la droite AE.

Mesurer l'inclinaison d'une ligne sur un plan.

XIV.

L'INSPECTION seule de la figure dont on vient de se servir dans l'Article précédent, fournit un nouveau

moyen d'abbaiſſer d'un point E, hors d'un plan X, une ligne EH, perpendiculaire à ce plan.

Nouvelle maniére d'abbaiſſer une ligne perpendiculaire à un plan donné.

Ayant tiré une ligne quelconque BAS, dans le plan X, on abbaiſſera du point donné E la perpendiculaire EA à cette ligne. Cela fait, du point A, où cette perpendiculaire tombe, on élevera dans le plan X la perpendiculaire AD à AB; & abbaiſſant enſuite du point donné E, à la droite AD, la perpendiculaire EH, cette ligne ſera la perpendiculaire au plan X.

XV.

Seconde maniére d'élever une ligne perpendiculaire à un plan donné.

ON tire de-là une ſeconde façon d'élever à un plan X, une perpendiculaire MN, d'un point M donné ſur ce plan.

Ayant abbaiſſé d'un point quelconque E pris hors du plan X, la perpendiculaire EH à ce plan, on ménera par le point donné M la droite MN

qui ſoit parallele à HE, & elle ſera la perpendiculaire au plan X.

XVI.

Après le parallelipipéde, le ſolide le plus ſimple eſt le priſme droit. C'eſt une figure ABCDEFGHIKLM dont les deux baſes oppoſées & paralléles ſont deux poligones égaux & tellement placés que les côtés GF, FE, &c. de l'un ſoient paralléles aux côtés BC, CD, &c. de l'autre, & dont les autres faces ſont des rectangles ABGH, BGFC, &c.

FIG. 10.

Le priſme droit eſt une figure ſolide, dont les deux baſes oppoſées ſont deux poligones égaux, & les autres faces des rectangles.

XVII.

Les Géométres ſuppoſent ces figures, formées ainſi que les parallélipipédes, par une baſe ABCDLM, qui ſe meut parallélement à elle-même, de façon que ſes angles A, B, &c. ſuivent des lignes perpendiculaires au plan de la baſe.

Formation des priſmes droits.

XVIII.

POUR diſtinguer les différentes eſpéces de priſmes droits, on ajoûte le nom du poligone qui leur ſert de baſe. Le priſme exagonal, par exemple, eſt celui dont la baſe eſt un exagone.

XIX.

Deux priſmes qui ont des baſes égales, ſont en même raiſon que leurs hauteurs.

POUR trouver la maniére de meſurer toutes ſortes de priſmes droits, on obſervera d'abord que de deux priſmes droits, dont les baſes ſeroient égales, celui qui auroit une plus grande hauteur ſeroit plus grand en ſolidité dans la même raiſon que ſa hauteur ſeroit plus grande.

XX.

Deux priſmes, qui ont la même hauteur, ſont en même raiſon que leurs baſes.

ON remarquera enſuite que deux priſmes droits, qui auroient la même hauteur, mais dont l'un auroit une baſe qui contiendroit un certain nombre de fois la baſe de l'autre, ſeroient entr'eux dans

dans la même raiſon que leurs baſes. La vérité de cette propoſition s'apperçoit facilement en faiſant attention à la formation des priſmes expliquée dans l'Article XVII.

Que *abcdefghiklm*, & ABCDEFGHIKLM ſoient les deux priſmes qui ont la même hauteur, & que la baſe *abcdlm* du plus petit, ſoit, par exemple, le quart de la baſe ABCDLM. Puiſque les deux priſmes ſont produits par les mouvemens de ces deux baſes, il s'enſuit qu'un plan quelconque, qui ſera paralléle au plan où ſont les deux baſes, coupera dans les deux priſmes, deux poligones, dont chacun ſera égal à la baſe du priſme où il ſera coupé. C'eſt-à-dire, que la ſection du grand priſme ſera toûjours quadruple de celle du petit. Donc le priſme ABCDEFGHIKLM pourra être regardé comme compoſé de tranches toutes quadruples de celle du priſme *abcdefghiklm*, & par conſéquent, la ſolidité du premier FIG. 10. & 11.

prisme sera quadruple de celle du second.

XXI.

APRE'S ces deux remarques, il ne sera pas difficile de former la régle suivante pour mesurer tous les prismes droits.

La mesure du prisme droit est le produit de sa base par sa hauteur.

On mesurera d'abord en pieds quarrés, ou en pouces quarrés, &c. l'aire de la base du prisme proposé, ensuite on multipliera le nombre qu'on aura trouvé, par le nombre des pieds, ou des pouces, &c. que contiendra la hauteur du prisme, & le produit donnera le nombre de pieds cubes, ou de pouces cubes, &c. contenus dans le prisme proposé, & sera, par conséquent, sa mesure.

XXII.

Les prismes obliques différent des prismes droits en ce que les faces qui sont des rectan-

LE nom de prisme se donne encore aux solides (Fig. 13.) qui ont deux bases poligones égales, ainsi que les précédens, mais dont les autres faces

ſont des parallélogrammes, au lieu d'être des rectangles. Pour diſtinguer ces nouveaux priſmes de ceux dont nous venons de parler, on les appelle des priſmes obliques, par oppoſition aux autres qu'on avoit nommés des priſmes droits.

gles dans ceux-ci, ſont des parallélogrammes dans ceux là.

XXIII.

Formation des priſmes obliques.

FIG. 13.

ON conçoit les priſmes obliques formés par une baſe *abcki*, qui ſe meut parallélement à elle-même, & de telle façon que ſes angles ſuivent des lignes paralléles *ag*, *bh*, *cd*, &c. qui s'élevent hors du plan de la baſe, & qui ne lui ſont point perpendiculaires.

XXIV.

L'ANALOGIE qu'il y a entre cette formation & la formation des priſmes droits dont nous avons parlé (Article XVII.) donne facilement la meſure de la ſolidité des priſmes obliques; car ſi on imagine à côté d'un priſme

Fig. 12. & 13. oblique *abcdefghik*, un prisme droit ABCDEFGHIK, qui ait la même base, & que ces deux prismes soient renfermés entre deux plans paralléles, on verra que la solidité de ces deux corps sera absolument la même.

Car, si par un point quelconque P de la hauteur, on fait passer un plan paralléle à la base, les sections NOPQR, *nopqr*, que ce plan formera dans chacun des deux prismes, pourront être regardées comme les bases égales AB CKI, *abcki*, arrivées en NOPQR, *nopqr*, par le mouvement qui forme ces deux prismes; & ainsi ces deux sections seront des poligones égaux.

Or si toutes les tranches imaginables qu'on peut former dans ces deux prismes par de mêmes plans coupans, sont égales, il faudra que les assemblages de ces tranches, c'est-à-dire, les prismes, soient égaux aussi.

Les prismes obliques sont égaux aux

On énonce ordinairement ainsi cette proposition : Les prismes obliques sont

égaux aux prismes droits, lorsqu'ils ont même base & même hauteur. On appelle la hauteur du prisme la perpendiculaire abbaissée du plan supérieur sur l'inférieur, ou sur son prolongement.

primes droits lorsqu'ils ont même base & même hauteur.

XXV.

Et comme les parallélipipédes doivent être mis au nombre des prismes, on étendra ce que nous venons de dire des prismes aux parallélipipédes obliques; c'est-à-dire, aux figures *abcdefgh* *, produites en faisant mouvoir un quarré, un rectangle, ou même un parallélogramme, de maniére que ses quatre angles suivent des lignes paralléles, qui s'élevent obliquement de la base. Ainsi, le parallélipipéde oblique *abcdefgh*, sera égal au parallélipipéde droit ABCDE FGH, si la base *abgh* est la même, ou a la même superficie que la base AB GH, & si la perpendiculaire abbaissée du plan *dcfe* sur le plan *abgh* est égale à la perpendiculaire abbaissée du

Il en est de même des parallélipipédes obliques à l'égard des parallélipipédes droits.

* Pl. XII. Fig. 1. & 2.

plan DCFE ſur le plan ABGH.

XXVI.

Ayant vû ce qui concerne les parallélipipédes & les priſmes, examinons maintenant les pyramides ; c'eſt-à-dire, les corps tels que ABCDEFG, renfermés par un certain nombre de triangles qui partent tous d'un même ſommet A, & qui ſe terminent à une baſe poligone quelconque BCDEFG. Il eſt néceſſaire de conſidérer ces ſortes de ſolides, non-ſeulement parce qu'on en rencontre dans les bâtimens & dans les autres ouvrages à conſtruire, mais parce que tous les ſolides terminés par des plans, ſont des aſſemblages de pyramides, ainſi que les figures rectilignes ſont des aſſemblages de triangles. Il ne faut, pour s'en aſſurer, que tirer d'un point pris où l'on voudra dans l'intérieur du corps propoſé, des lignes à tous les angles de ce corps.

Fig. 3.

XXVII.

On diſtingue les pyramides les unes des autres, ainſi que les priſmes, par le nom de la figure qui leur ſert de baſe.

XXVIII.

Lorsque la pyramide a pour baſe une figure réguliere, & que ſon ſommet répond perpendiculairement au centre H de ſa baſe, ainſi que dans la Fig. 3. la pyramide eſt alors appellée pyramide droite; elle eſt nommée, au contraire, pyramide oblique, lorſque le ſommet n'eſt pas perpendiculairement au-deſſus du centre, ainſi que dans la Fig. 5.

XXIX.

Pour découvrir la maniére de meſurer toutes ſortes de pyramides, tant droites qu'obliques, nous commencerons par faire ſur ces figures, quelques

réfléxions générales, auxquelles on eſt conduit par la connoiſſance des propriétés des priſmes.

Lorſqu'on fait attention à l'égalité des priſmes qui ont même baſe & même hauteur, il eſt naturel qu'on ſe rappelle que les parallélogrammes ſont auſſi égaux entr'eux, lorſqu'ils ont ces mêmes conditions, & qu'il en eſt encore de même des triangles. Ces trois vérités ſe préſentant à la fois à l'eſprit, l'analogie doit porter à croire que les propriétés qui ſont communes aux paralellogrammes & aux triangles, peuvent l'être auſſi aux priſmes & aux pyramides; on doit donc ſoupçonner que les pyramides qui ont même baſe & même hauteur, ont la même ſolidité.

XXX.

Les réfléxions ſuivantes confirmeront ce ſoupçon.

Fig. 4. & 5. Soient ABCDE, *abcde*, deux pyramides, dont les hauteurs AH, *ah*,

ſoient les mêmes, & dont les baſes ſoient deux figures égales, par exemple, deux quarrés égaux BCDE, *bcde*; ſi on conçoit que ces deux pyramides ſoient coupées par une infinité de plans paralléles à leurs baſes, on imaginera, ſans peine, que ces coupes de pyramide donneront des quarrés égaux IKLM, *iklm*, & par conſéquent, que les deux pyramides peuvent être regardées comme des aſſemblages d'un même nombre de tranches, qui dans ces deux pyramides ſeront égales chacune à ſa correſpondante. Donc, conclura-t-on, la ſomme des tranches eſt la même, de part & d'autre : c'eſt-à-dire, que les deux pyramides ont la même ſolidité.

Si les baſes des deux pyramides étoient d'autres poligones réguliers ou irréguliers BCDEF, *bcdef*, égaux entr'eux, il n'y a perſonne qui ne penſât encore, que toutes les tranches IKLMN, *iklmn*, de l'une & de l'autre de ces deux pyramides devroient FIG. 6. & 7.

être égales entr'elles ; & qui n'en conclut, par conséquent, que les pyramides seroient toûjours les mêmes, lorsquelles auroient même base & même hauteur.

XXXI.

Tout cela est aisé à imaginer après la démonstration que nous avons donnée, de l'égalité des prismes qui ont même hauteur; cependant la similitude entre la tranche quelconque IKLMN d'une pyramide & la base BCDEF, & l'égalité des tranches IKLMN & *iklmn*, sont de ces propositions, qui, quoique sensibles pour tout le monde, ont, à la rigueur, besoin d'une démonstration ; or pour trouver cette démonstration, on est obligé d'entrer dans plusieurs considérations sur la similitude des figures solides.

XXXII.

Reprenons la pyramide ABC DEF, & supposons-la coupée par un

plan IKLMN, paralléle à la base, nous allons démontrer que la section, ou la coupe formée par ce plan dans la pyramide, est un poligone parfaitement semblable au poligone BCDEF; & que la pyramide AIKLMN est elle-même entiérement semblable à la pyramide ABCDEF, c'est-à-dire, que les angles que forment toutes les lignes de ces deux figures sont respectivement égaux, & que tous les côtés de la petite pyramide auront le même rapport entr'eux que ceux de la grande.

En quoi consiste la similitude de deux pyramides.

XXXIII.

COMMENÇONS par observer que si deux plans X & Y sont parallé-les, & que deux lignes quelconques ALD, AME, partant d'un même point A, traversent ces deux plans, les droites LM, DE, qui joindront les points L, M; D, E, seront parallé-les. La raison en est, que si ces deux lignes n'étoient pas paralléles, elles se

FIG. 8.

rencontreroient quelque part, étant prolongées ; mais ſi elles ſe rencontroient, les plans dans leſquels elles ſont, & dont elles ne peuvent pas ſortir, en les prolongeant autant qu'il ſeroit néceſſaire, ſe rencontreroient donc auſſi. Donc ils ne ſeroient pas parallé-les, ainſi qu'on le ſuppoſe.

XXXIV.

Si on ſuppoſe donc que le plan
Fig. 6. IKLMN ſoit paralléle au plan BCD EF ; il s'enſuivra que toutes les lignes ML, LK, KI, IN, NM, ſeront paralléles aux lignes ED, DC, CB, BF, FE, & par conſéquent, que les triangles ALM, AKL, AIK, &c. ſeront ſemblables aux triangles ADE, ACD, ABC, &c. Si on prend l'un des côtés de ces triangles, AM par exemple, pour commune meſure, ou pour échelle de tous les côtés de la petite pyramide, pendant que le côté correſpondant AE ſervira d'échelle aux côtés de la grande,

on verra, ſans peine, que les côtés ML, LK, KI, &c. du poligone IKLMN ſeront proportionnels aux côtés ED, DC, C B, &c. du poligone BCDEFG.

On verra auſſi facilement que tous les angles IKL, KLM, &c. ſeront reſpectivement égaux aux angles BCD, CDE, puiſque les premiers ſeront formés par des lignes paralléles aux côtés des ſeconds. Donc les deux poligones IKLMN, BCDEF, ſeront ſemblables.

XXXV.

Or les côtés AM, AL, AK, &c. étant proportionnels aux côtés AE, AD, AC, &c. & les angles ALM, ALK, &c. reſpectivement égaux aux angles ADE, ADC, &c. à cauſe de la reſſemblance des triangles ALM, ADE; ALK, ADC, &c. les deux pyramides AIKLMN, ABCDEF, ſeront entiérement ſemblables.

XXXVI.

ENFIN, si on méne du point A, AH, perpendiculaire au plan sur lequel est construit le poligone BCDEF, & que Q soit le point où cette perpendiculaire rencontre le plan du poligone IKLMN, il est clair que les droites AQ, AH, hauteurs des deux pyramides AIKLMN, ABCDEF, seront entr'elles dans la même raison que les côtés homologues AM, AE; AL, AD, &c. ou, ce qui revient au même, que si on prend les hauteurs AQ, AH, pour les échelles des deux pyramides, les côtés AM, AL, &c. contiendront autant des parties de AQ, que les côtés AE, AD, &c. contiendront des parties de AH.

XXXVII.

QU'ON revienne maintenant à considérer les deux pyramides ABCDEF, *abcdef*, à la fois, on verra que les deux

FIG. 6. & 7.

tranches IKLMN, *iklmn*, étant semblables aux bases BCDEF, *bcdef*, qui sont les mêmes, elles seront semblables entr'elles. On verra, de plus, que ces deux tranches seront égales entr'elles, puisque les échelles de ces deux figures sont les droites égales AQ, *aq*, hauteurs des pyramides AIKLMN, *aiklmn*.

Donc, sans connoître quelle est la solidité des pyramides, on sçait déja, avec certitude, que si elles ont même hauteur & même base, elles sont égales, ainsi que nous l'avions soupçonné (Article XXIX.)

Les pyramides qui ont même base & même hauteur, sont égales.

XXXVIII.

Si les bases des deux pyramides, au lieu d'être les mêmes, étoient seulement égales en superficie, les pyramides seroient encore égales en solidité; car soit *abcdef**, & *arst*, deux pyramides qui ont la même hauteur *ah*, si on coupe ces deux pyramides par

Deux pyramides sont encore égales, si ayant la même hauteur, leurs bases, sans être des polygones semblables, sont égales en superficie.

*Fig. 7. & 9.

un plan quelconque paralléle à la baſe, il eſt évident qu'il y aura même rapport de l'aire *iklmn* à l'aire *bcdef*, que de l'aire *uxy* à l'aire *rſt* ; puiſque *iklmn*, *bcdef*, étant (Article XXXIV.) des figures ſemblables, elles ne différent (I. Part. Art. XLVIII.) que par leurs échelles *aq*, *ah*, &c. & que les figures *uxy*, *rſt*, étant auſſi ſemblables, elles ne différent, non plus, que par leurs échelles, qui ſont encore les lignes *aq*, *ah*.

Mais ſi les baſes *rſt*, *bcdef*, ſont égales en ſuperficie, leurs parties proportionnelles *uxy*, *iklmn*, ſeront donc égales. Donc toutes les tranches des deux pyramides *arſt*, *abcdef*, auront la même étenduë. Donc leurs aſſemblages; c'eſt-à-dire, les pyramides mêmes, ſeront égales en ſolidité.

XXXIX.

Les pyramides qui ont même hau-

SI la baſe *bcdef* de la premiere pyramide contenoit un certain nombre de fois

fois la base *rst*, la solidité de la premiere pyramide *abcdef*, contiendroit le même nombre de fois la solidité de la seconde *arst*.

teur, sont entr'elles comme leurs bases.

Car, en ce cas, la base *bcdef* étant divisée en plusieurs parties, dont chacune fût égale à la base *rst*, on pourroit concevoir la pyramide *abcdef*, comme composée de plusieurs autres pyramides, qui auroient pour bases les parties de *bcdef*. Or chacune de ces nouvelles pyramides seroit égale à la seconde pyramide *arst*, selon que nous l'avons prouvé dans l'Article précédent. Donc, &c.

Que si la base *rst* n'étoit pas contenuë exactement dans la base *bcdef*, mais que ces deux bases eussent une mesure commune X, on diviseroit chacune des deux bases *bcdef*, *rst*, en des parties égales à X, & on verroit que les deux pyramides *abcdef*, *arst*, seroient composées d'autant de pyramides nouvelles, toutes égales entr'elles,

que les deux bases contiendroient de parties X. Donc les pyramides *abcdef*, *arst*, seroient entr'elles comme leurs bases.

Et si les bases étoient incommensurables, on feroit toûjours voir, malgré cela, que les pyramides seroient entr'elles en même raison que leurs bases, en se servant d'une induction semblable à celle qu'on a employée dans un pareil cas (II. Part. Art. XXVIII.) lorsqu'il s'agissoit de comparer les figures dont les côtés étoient incommensurables; c'est-à-dire, qu'on diminueroit à l'infini la mesure X, de façon qu'elle pût être censée mesure commune, tant de la base *rst*, que de la base *bcdef*.

XL.

Ayant découvert que les pyramides qui ont même hauteur sont en même raison que leurs bases, on doit sentir que la mesure de leur solidité

ne renferme plus que très-peu de difficulté.

Car il ne s'agit plus que de sçavoir mesurer une seule pyramide, pour mesurer toutes les autres. Supposons, par exemple, que nous sçachions mesurer la pyramide ABCDE, & qu'on nous demande la mesure de la pyramide AS TVXY, qui n'a ni la même base, ni la même hauteur que la premiere : nous commencerons par faire une pyramide semblable à la pyramide ABCDE, & qui ait la hauteur de la pyramide ASTVXY, ce qui sera bien aisé; car il suffira (Article XXXV.) de prolonger les côtés AB, AC, AD, AE, & de les couper par le plan LMNO, dont la distance AG au sommet A, soit égale à la hauteur AQ.

FIG. 10. & 11.

Cela fait, puisque par la supposition nous sçavons mesurer la pyramide AB CDE, il est évident que nous sçaurons mesurer aussi la pyramide ALMNO, qui lui est semblable; car quelles que

soient les opérations par lesquelles on mesure la pyramide ABCDE, on pourra toûjours faire les mêmes opérations pour mesurer la pyramide semblable ALMNO, à cela près qu'on emploiera dans celle-ci une échelle différente.

Supposons donc que la pyramide ALMNO soit mesurée, sa mesure déterminera aussi celle de la pyramide proposée ASTVXY, car par l'Article précédent, ces deux pyramides sont entr'elles comme leurs bases LMNO, STVXY, & nous avons d'ailleurs enseigné dans la seconde Partie à trouver le rapport de ces deux bases.

XLI.

PUISQU'IL ne s'agit donc que de mesurer une seule pyramide, pour sçavoir mesurer toutes les autres pyramides imaginables, proposons-nous-en une extrêmement simple, qu'on peut former en tirant des quatre angles A, B, C, H, d'une des faces d'un cube

FIG. 12.

ABCDEFGH, quatre lignes au point O, centre de ce cube; c'eſt-à-dire, le point également diſtant de A, D, B, E, &c.

On voit, ſans peine, que cette pyramide eſt la ſixiéme partie du cube, puiſqu'on peut décompoſer le cube en ſix pyramides pareilles, en prenant chaque face pour baſe. Or la valeur du cube eſt le produit de la hauteur AF par la baſe ABCH. Donc, pour avoir la valeur de la pyramide, il faudra partager le produit de AF par ABCH, en ſix parties égales, ou, ce qui revient au même, il faudra multiplier la ſixiéme partie de la hauteur AF par la baſe AB CH, & comme la ſixiéme partie de la hauteur AF eſt le tiers de la hauteur OL de la pyramide OABCH, puiſque ſa hauteur OL eſt la moitié du côté du cube, il s'enſuit que la meſure de la pyramide OABCH eſt le produit du tiers de ſa hauteur par ſa baſe.

XLII.

SUPPOSONS présentement qu'on ait à mesurer une pyramide quelconque OKMNSTV, on imaginera un cube dont le côté AB ou AF soit double de la hauteur OL de la pyramide proposée, & on concevra dans ce cube, une pyramide OABCH, dont la pointe soit au centre, & qui ait pour base une des faces ABCH du cube. Cette nouvelle pyramide aura même hauteur que la premiere; & par conséquent, (Article XXXIX.) la solidité de OABCH sera à celle de OKMNSTV, comme la base ABCH à la base KMNSTV; or par l'Article précédent, le produit du tiers de la hauteur commune OL par la base ABCH, est la valeur de la pyramide OA BCH; donc le produit du tiers de la même hauteur commune OL par la base KMNSTV, sera la valeur de la pyramide proposée OKMNSTV.

Fig. 13.

La solidité d'une pyramide quel-

Et par-là, on découvre ce théorême

général, qu'une pyramide a pour mesure le produit de ſa baſe par le tiers de ſa hauteur.

conque, eſt le produit de ſa baſe par le tiers de ſa hauteur.

XLIII.

COMME nous avons vû (Article XXI.) que la ſolidité d'un priſme, eſt le produit de la baſe par la hauteur, il eſt clair, par l'Article précédent, que les pyramides ſeront toûjours le tiers des priſmes qui auront même baſe & même hauteur.

La pyramide eſt le tiers du priſme qui a même baſe & même hauteur.

XLIV.

APRÈS avoir meſuré tous les ſolides terminés par des plans, nous allons chercher le chemin qu'on peut avoir ſuivi pour meſurer les ſolides dont les ſurfaces ſont courbes. Et comme nous n'avons traité dans la troiſiéme Partie que des figures, dont les contours ne renferment d'autres courbes que le cercle, nous n'examinerons que les corps dont les courbures ſont circulaires.

Dans l'examen de ces corps, nous aurons deux objets, la meſure de leurs ſurfaces & celle de leurs ſolidités ; car ces ſurfaces étant, ou entiérement courbes, ou en partie planes & en partie courbes, nous ne pourrons renvoyer leur meſure à la premiere Partie, ainſi que nous l'avons fait des corps terminés par des plans.

XLV.

Pl. XIII. Fig. 1. & 2.

Le cylindre eſt un ſolide terminé par deux baſes oppoſées & paralléles, qui ſont des cercles égaux, & par un plan plié autour de leurs circonférences.

Le plus ſimple de tous les ſolides courbes, eſt le cylindre ; c'eſt un corps comme ABCDEF, dont les deux baſes ABC, DEF, ſont deux cercles égaux joints par une ſurface courbe qu'on peut imaginer formée par un plan plié autour de leurs circonférences.

Fig. 1.

On le diſtingue en cylindre droit, & en cylindre oblique.

Lorſque les deux cercles ſont placés de façon que le centre G du premier réponde perpendiculairement au-deſſus du centre H du ſecond, le cylindre ſe nomme droit.

Le cylindre ſe nomme au contraire

oblique, lorſque la ligne tirée par les deux centres G& H, eſt oblique à l'égard des plans ABC, DEF. Fig. 2.

XLVI.

Formation du cylindre.

La formation géométrique de ces ſolides, analogue à celles des priſmes & des parallélipipédes, dont il a été parlé (Article XVII.) conſiſte à faire mouvoir un cercle parallélement à lui-même, en ſorte que tous ſes points décrivent des lignes droites paralléles qui s'élévent hors du plan de ce cercle.

XLVII.

On parviendra, de la maniére ſuivante, à meſurer la ſurface d'un cylindre droit ; ce qui eſt ſouvent néceſſaire dans la pratique.

Les deux circonférences ABC, DEF, Fig. 1. étant partagées chacune en un même nombre de parties égales, les points de diviſion répondant les uns au-deſſus des

autres, qu'on tire des lignes droites qui joignent les angles correſpondans des deux poligones réguliers que donne cette opération. Il eſt clair qu'on aura alors un priſme dont la ſuperficie ſera compoſée d'autant de rectangles renfermés dans la ſurface du cylindre, qu'il y a de côtés renfermés dans chacune des circonférences ABC, DEF. Or tous ces rectangles ayant chacun leur hauteur égale à AD, leur meſure totale ſera le produit de la hauteur AD par la ſomme de toutes les baſes, c'eſt-à-dire, par le contour du poligone renfermé ou inſcrit dans le cercle DEF ou ABC.

Mais comme à meſure que le nombre des côtés de ce poligone ſera grand, le contour du poligone approchera, de plus en plus, d'être égal à la circonférence, & la ſurface du priſme d'être égale à celle du cylindre; il s'enſuit que ſi on imagine que le nombre des côtés de ce poligone devienne infini, le priſme ne

La ſurface courbe d'un cylindre

différera pas du cylindre. La surface courbe du cylindre droit est donc égale à un rectangle dont la hauteur seroit AD, & la base une ligne droite égale à la circonférence DEF.

droit est égale à un rectangle qui a la même hauteur, & dont la base est égale à sa circonférence.

Cette proposition peut servir à trouver, par exemple, ce qu'il faudroit d'étoffe pour envelopper un pilier cylindrique, ou pour tapisser le dedans d'une Tour ronde.

XLVIII.

QUANT à la surface du cylindre oblique, on ne peut pas la mesurer de la même maniére, parce qu'au lieu de rectangles, on auroit des parallélogrammes de hauteurs différentes. Ce n'est que par des méthodes très-compliquées & très-difficiles, qu'on est parvenu à connoître seulement la valeur approchée de cette surface ; & les problêmes de ce genre ne sont pas du ressort des élémens.

XLIX.

A l'égard de la ſolidité des cylindres, ſoit droits, ſoit obliques, rien ne ſera plus aiſé que de la trouver. Car il eſt évident que tout ce que nous avons dit des priſmes, conviendra aux cylindres, ſi on regarde les cylindres comme les derniers des priſmes qu'on peut leur inſcrire.

Les cylindres qui ont même baſe & même hauteur, ſont égaux en ſolidité.

Ainſi les cylindres qui auront même baſe & même hauteur, ſeront égaux en ſolidité.

L.

La meſure d'un cylindre qnelconque eſt le produit de ſa baſe par ſa hauteur.

Et la meſure d'un cylindre quelconque conſiſtera dans le produit de ſa baſe par ſa hauteur.

LI.

Le cone eſt le ſolide courbe le plus ſimple après le cylindre ; c'eſt une figure comme ABCDE, dont la baſe eſt un cercle, & dont la ſurface eſt com-

Fig. 3. & 4.

posée d'une infinité de lignes droites, qui aboutissent toutes du sommet A à la circonférence BCDE de ce cercle. On peut regarder ce solide comme une pyramide dont la base seroit un cercle.

Le cone est une espéce de pyramide, dont la base est un cercle.

LII.

Si, comme dans la figure 3, la pointe ou sommet A du cone répond perpendiculairement au-dessus du centre O de la base, le cone est nommé cone droit; & il est nommé oblique, si le sommet répond à un point différent du centre de la base, ainsi que dans la figure 4.

On le distingue en cone droit & en cone oblique.

LIII.

Pour mesurer la surface d'un cone droit ABCDE, on le regardera comme la derniere des pyramides qu'on peut lui inscrire; c'est-à-dire, qu'on divisera la circonférence de sa base BCDE, ainsi qu'on a fait de la circonférence du cylindre, en une infinité de petits côtés, & tirant des lignes de tous

Fig. 3.

les angles au ſommet du cone A ; on trouvera que la ſuperficie conique eſt un aſſemblage d'une infinité de petits triangles iſocéles, dont la hauteur eſt égale au côté AB du cone, & dont toutes les baſes ajoûtées enſemble, ſont égales à la circonférence BCDE ; d'où il eſt aiſé de voir que la meſure de cette ſurface ſe trouvera en multipliant la moitié de AB par la circonférence BCDE.

La ſurface d'un cone droit ſe meſure en multipliant la moitié de ſon côté par la circonférence de ſa baſe.

LIV.

Si on ſe rappelle maintenant que la ſurface d'un ſecteur de ce cercle eſt égale (III. Part. Art. X.) eſt égale au produit de l'arc de ce ſecteur par la moitié du rayon, on verra que pour envelopper le cone droit ABCDE d'une ſurface pliante comme du carton, &c. il faudroit prendre un ſecteur de cercle, dont le rayon fût égal à AB, & dont l'arc fût égal à la circonférence BCDE.

Le développement d'un cone eſt un ſecteur de cercle.

LV.

LORSQUE le cone eſt oblique, la meſure de ſa ſurface, ainſi que celle du cylindre oblique, eſt fort difficile à connoître même d'une maniére approchée, & c'eſt encore un problême au-deſſus des Elémens.

LVI.

QUANT à la ſolidité des cones, ſoit droits, ſoit obliques, on les regardera comme les dernieres des pyramides qu'on pourroit leur inſcrire, & on pourra leur appliquer en conſéquence ce qu'on a dit des pyramides en général.

Ainſi les cones qui auront même baſe & même hauteur, ſeront égaux.

Les cones qui ont même baſe & même hauteur ſont égaux.

LVII.

ET la ſolidité d'un cone quelconque ſera le produit de la baſe par le tiers de ſa hauteur.

Leur meſure eſt le produit de la baſe par le tiers de la hauteur.

LVIII.

Fig. 5. & 6. On a quelquefois beſoin de meſurer un corps comme BCDEFGH, qu'on appelle cone tronqué ; c'eſt la partie qui reſte d'un cone AFGH, lorſqu'on en a retranché un autre cone plus petit AB CDE, par une ſection paralléle à la baſe FGH. Il eſt évident que la meſure de ce ſolide ſera la différence entre les ſolidités des deux cones ABCDE, AF GH.

LIX.

Quant à la ſurface d'un cone tronqué, s'il a été formé par la ſection d'un cone droit, on peut trouver quelque choſe de plus ſimple que de meſurer ſéparément les ſurfaces des deux cones, & de retrancher l'une de l'autre, on emploiera pour cela la méthode ſuivante, qui eſt aiſée à imaginer, après ce que nous avons dit, (Article LIV.)

Fig. 6. & 7. Suppoſons que ALR ſoit le ſecteur qu'il

faudroit conſtruire pour pouvoir envelopper le cone AFGH ; en décrivant du centre A & de l'intervalle AM égal à AB, un arc MP, il eſt clair que l'eſpace MPRL ſeroit une portion de couronne propre à envelopper la ſurface cherchée du cone tronqué. Or ſi on imagine que les deux circonférences, dont MP & LR ſont des arcs ſemblables, ſoient achevées, on aura une couronne entiére, dont la meſure (III. Part. Art. VIII.) ſera le produit de ML, égal à BF par la circonférence dont AN eſt le rayon, N étant le milieu de ML. Donc la portion de couronne MPRL, ou la ſurface du cone tronqué BCDE FGH qui lui eſt égale, ſe meſurera en multipliant ML par l'arc NQ ; ou, ce qui revient au même, en multipliant BF par la circonférence IKL, que donne la ſection du ſolide propoſé par un plan paralléle à la baſe, & qui paſſe par le milieu I du côté BF.

Maniére de meſurer la ſurface d'un cone tronqué.

LX.

La sphére est le corps dont la surface a tous ses points également éloignés du centre.

Le dernier des corps solides que nous traiterons, se nomme sphére ou globe ; c'est celui dont la surface a tous ses points également éloignés d'un même point qui en est le centre. On a souvent besoin de mesurer cette surface ; on voudra sçavoir, par exemple, ce qu'il faudroit de dorure pour une boule, combien on devroit prendre de lames de plomb pour couvrir un dôme, &c.

LXI.

Fig. 8.

Soit X la sphére dont on veut mesurer la superficie, il est évident qu'on peut concevoir ce solide comme produit par la révolution d'un demi-cercle AMB, autour de son diamétre AB.

Supposons d'abord qu'au lieu de la demi-circonférence, nous ayons un poligone régulier d'un nombre infini

de petits côtés, ou, ſi on veut, d'un très-grand nombre de côtés ; & propoſons-nous ſeulement de meſurer la ſurface Z, produite par la révolution de ce poligone. Il ſera facile de paſſer enſuite de la meſure de cette ſurface à la meſure de la ſurface de la ſphére, ainſi que nous avons paſſé de la meſure des figures rectilignes à celle du cercle. Fig. 9.

LXII.

Pour meſurer la ſurface du ſolide Z, examinons la petite partie de cette ſurface, que produit un ſeul côté quelconque *Mm* du poligone inſcrit, pendant qu'il tourne autour du diamétre AB. Il eſt évident que ce côté M*m* décrit dans ce mouvement une ſurface de cone tronqué V. Car en prolongeant la droite *m*M juſqu'à ce qu'elle rencontre en T le diamétre ou axe de révolution AB, ſi cette ligne TM*m* tourne en même tems que le demi-cercle AMB, elle Pl. XIV. Fig. 1.

décrira visiblement un cone droit ; dont le sommet sera T, & la base, le cercle décrit par le point *m* ; en sorte que la surface V, produite par le mouvement de M*m*, sera une tranche de ce cone, enfermée entre les plans dece r-cles que les points M & *m* décrivent en tournant. Mais selon que nous l'avons vû (Article LIX.), la surface V est égale à un rectangle dont M*m* est la hauteur, & la base, une ligne égale à la circonférence KLO, décrite par le point K, milieu de M*m*. Donc la surface produite par la révolution du poligone est égale à la somme d'autant de rectangles de cette nature, qu'il y a de côtés dans ce poligone, tels que M*m*.

Or comme tous les côtés M*m*, hauteurs de ces rectangles, sont supposés égaux, on pourroit regarder la surface cherchée comme un rectangle total qui auroit la hauteur M*m*, avec une base égale à la somme de toutes les circon-

férences telles que KL, c'eſt-à-dire, décrites par le point de milieu de chaque petit côté.

Mais le poligone inſcrit dans le demi cercle AMB, ayant un très-grand nombre de côtés, la petiteſſe de la hauteur M*m*, & la grandeur exceſſive de la baſe, rendent ce rectangle inconſtructible.

Pour remédier à cet inconvénient, il eſt bien aiſé d'imaginer de changer tous ces petits rectangles en d'autres qui auroient toûjours une même hauteur, non pas imperceptible comme M*m*, mais aſſez grande pour que chacune des baſes devînt fort petite; moyennant cela, l'addition de toutes ces petites baſes ne fera plus qu'une longueur comparable à la hauteur.

LXIII.

VOYONS donc ſi nous ne pourrons point changer de cette ſorte nos petits rectangles. Suppoſons d'abord, pour

ſimplifier le problême, que nos rectangles, au lieu d'avoir pour baſes des lignes égales aux circonférences KL, n'ayent pour baſes que les rayons KI de ces circonférences. Il ne nous ſera pas difficile enſuite d'appliquer ce que nous aurons trouvé pour ces derniers rectangles, à ceux dont nous avons affaire.

FIG. 2.

Il s'agit donc de trouver un rectangle qui ait pour meſure le produit de M*m* par KI, & qui ait pour hauteur quelque ligne incomparablement plus grande que M*m*, & qui ſoit la même en quelque endroit que ſoit placé ce petit côté M*m*. Choiſiſſons, par exemple, la droite CK, qui eſt l'apothéme du poligone dont M*m* eſt le côté, & qui, par conſéquent, eſt toûjours la même, à quelque côté du poligone qu'elle appartienne. Nous devons donc chercher une ligne dont le produit par CK ſoit égal au produit de KI par M*m*; c'eſt-à-dire (II. Part. Art. VII.) qu'il faut

trouver une quatriéme proportionnelle aux trois lignes KC, KI, M*m*. Or nous sçavons que c'est par le moyen des triangles semblables, qu'on découvre des lignes proportionnelles dans les figures, il faut donc former des triangles semblables, dont les côtés homologues soient les lignes en question; c'est ce qu'on fera en abbaissant MR, perpendiculaire à *mp*. On aura alors les triangles M*m*R, KIC, qui seront semblables; car ils seront chacun rectangle, l'un en R, l'autre en I, & de plus, ils auront les angles *m*MR, IKC égaux entr'eux, à cause que le premier fait un angle droit avec l'angle M*m*R, égal à l'angle MKI, & que l'autre IKC fait aussi un droit avec MKI.

De-là on peut conclure facilement que KC est à KI, comme M*m* à MR; c'est-à-dire, que MR est la quatriéme proportionnelle cherchée; ou, ce qui revient au même, que le rectangle de KC par MR ou par P*p*, est égal

au rectangle de M*m* par KI.

Mais comme le rectangle que nous nous étions d'abord proposés de changer, n'étoit pas celui de M*m* par KI, que c'étoit celui de M*m* par la circonférence dont KI est le rayon; nous nous rappellerons ici que les circonférences sont entr'elles comme les rayons; ce qui fait que l'égalité qui est entre le rectangle de M*m* par KI, & celui de P*p* par CK, entraîne nécessairement l'égalité du rectangle de M*m* par la circonférence de KI, au rectangle de P*p*, par la circonférence de CK. Car on sent facilement que si deux rectangles sont égaux, & que conservant leurs hauteurs, on augmente proportionnellement leurs bases, ces rectangles demeureront encore égaux.

LXIV.

Ayant découvert dans les deux Articles précédens que toutes les petites surfaces coniques tronquées, telle

que V (Fig. 1.) ſont égales à autant de rectangles qui auroient tous pour hauteur une même droite égale à la circonférence, dont KC ſeroit le rayon, & dont chacun auroit pour baſe une petite droite P*p*, correſpondant à chaque côté M*m*; on en déduira qu'une ſomme quelconque de ces petites ſurfaces, priſe depuis A juſqu'en *p*, par exemple, ſera égale à un rectangle qui auroit pour hauteur une droite égale à la circonférence de CK, & pour baſe la ſomme de toutes les lignes telles que P*p*, priſes depuis A juſqu'en *p*, c'eſt-à-dire, la droite A*p*.

Donc pour avoir la ſurface totale produite par la révolution du poligone entier, il faudra faire un rectangle dont la baſe ſoit égale à la circonférence décrite du rayon CK, & qui ait une hauteur égale au diamétre AB.

LXV.

Il eſt bien aiſé maintenant de meſurer la ſurface de la ſphére. Car il

eſt clair que plus il y aura de côtés dans le poligone, plus le ſolide produit par ſa révolution approchera d'être égal à la ſphére, & plus auſſi l'apothême CK approchera d'être égal au rayon, en ſorte que ſi on peut imaginer que le poligone ſoit devenu un cercle, l'apothéme CK ſera le rayon même, & la ſurface de la ſphére aura la même étenduë qu'un rectangle dont la hauteur & la baſe ſeroient, l'une le diamétre, & l'autre une ligne égale à la circonférence du cercle qui l'a produite, & qu'on appelle ordinairement le grand cercle de la ſphére.

La ſurface de la ſphére a pour meſure le produit de ſon diamétre par la circonférence de ſon grand cercle.

LXVI.

Ce que c'eſt qu'un ſegment de ſphere.

* Fig. 3.

QUANT à la ſurface courbe d'un ſegment de ſphére AMLNO *; c'eſt-à-dire, de la partie de la ſphére qu'on en retranche, lorſqu'on la coupe par un plan MLNO, perpendiculaire au diamétre; elle a pour meſure le produit de ſon épaiſſeur ou fléche AP par la circonférence du grand cercle AM

Comment on meſure ſa ſurface.

BN. La raiſon en eſt la même que celle par laquelle on a prouvé (Article LXIV.) que la ſomme des ſurfaces de tous les petits cones tronqués, compris depuis A juſqu'en *m*, eſt égale au rectangle dont la hauteur eſt A*p*, & la baſe une ligne égale à la circonférence dont CK eſt le rayon. FIG. 2.

LXVII.

La meſure précédente de la ſurface de la ſphére, apprend que ſi on fait tourner le rectangle ABDE en même-tems que le demi cercle AMNB autour de AB, la ſurface courbe du cylindre droit EFGIKDH produit par la révolution de ce rectangle, ſera égale à celle de la ſphére décrite par le demi-cercle; ce qu'on exprime ordinairement ainſi; la ſurface de la ſphére eſt égale à celle du cylindre circonſcrit. FIG. 4.

La ſurface de la ſphére eſt égale à celle du cylindre circonſcrit.

LXVIII.

Et ſi on coupe, tant le cylindre, que la ſphére, par deux plans quelconques

Les tranches du cylindre & de la sphére ont la même superficie.

perpendiculaires au diamétre AB, en P & en Q, les tranches de la sphére & du cylindre qui seront produites par le mouvement de la droite OS, & de l'arc MN, seront égales en superficie.

LXIX.

La surface de la sphére est égale à quatre fois celle de son grand cercle.

On voit encore, par ce qui précéde, que la surface de la sphére est égale à quatre fois l'aire de son grand cercle; car la surface de ce grand cercle a pour mesure le produit de la moitié du rayon ou du quart du diamétre par la circonférence, & la superficie de la sphére est égale au produit du diamétre entier par la même circonférence.

LXX.

La mesure de la surface de la sphére étant trouvée, il est bien aisé de mesurer sa solidité; car on peut considérer la sphére comme l'assemblage d'une infinité de petites pyramides, dont les sommets sont à son centre, & dont toutes les bases couvrent sa surface entiere. Or

chacune de ces pyramides ayant pour mesure le produit du tiers de sa hauteur c'est-à-dire, du rayon, par sa base, leur somme totale ou la solidité de la sphére se mesurera en multipliant le tiers du rayon par sa surface, c'est-à-dire, par quatre fois l'aire du grand cercle.

La solidité de la sphére est le produit du tiers du rayon par quatre fois l'aire du grand cercle.

LXXI.

COMME le produit du tiers du rayon par quatre fois le grand cercle, est la même chose que le produit de quatre fois le tiers du rayon, c'est-à-dire, des deux tiers du diamétre par le grand cercle, & que la solidité du cylindre EF GIKDH a pour mesure le produit du diamétre par le même grand cercle qui lui sert de base ; il s'ensuit que la solidité de la sphére est les deux tiers de celle du cylindre circonscrit.

La solidité de la sphére est les deux tiers de celle du cylindre circonscrit.

LXXII.

SI on se proposoit de mesurer la

Mesure de la solidité d'un segment de sphére.

* FIG. 3.

solidité d'un segment de sphére AML NO *, il est évident qu'il faudroit d'abord mesurer la portion de sphére produite par la révolution du secteur CA M ; ce qui se feroit en multipliant le tiers du rayon par la surface du segment de sphére proposé AMLNO : ensuite on retrancheroit de cette mesure celle du cone produit par la révolution du triangle CPM, c'est-à-dire, le cone dont la base est le cercle MLNO, & CP la hauteur, & le reste feroit la valeur demandée du segment.

LXXIII.

NOUS finirons ces Elémens par quelques Propositions sur la solidité & sur la superficie des corps semblables. Ces Propositions se présentent fort naturellement, lorsqu'on réfléchit sur ce qui constitue la similitude de deux corps. On peut dire même qu'on ne peut guéres manquer de les décou-

vrir par analogie, ſi on ſe rappelle ce que nous avons dit (I. Part. Art. XXXIV. & ſuiv.) de la ſimilitude des figures planes ; c'eſt-à-dire, de celles qui ſont décrites ſur des plans.

Nous avons déterminé (Art. XXXII.) en quoi conſiſte la ſimilitude de deux pyramides; la définition que nous avons donnée alors des pyramides ſemblables, peut s'étendre à tous les corps terminés par des plans : c'eſt-à-dire, que deux corps de cette nature ſeront appellés ſemblables, ſi tous les angles formés par les côtés du premier ſont les mêmes que les angles formés par les côtés du ſecond, & ſi les côtés d'un de ces corps ſont proportionnels aux côtés homologues de l'autre.

En quoi conſiſte la ſimilitude de deux corps terminés par des plans.

LXXIV.

Quant aux corps qui ne ſont pas terminés de tous les côtés par des plans, les cylindres & les cones, par exemple, il eſt auſſi facile de déterminer les condi-

tions néceſſaires pour les rendre ſemblables.

Conditions qui déterminent la ſimilitude de deux cylindres droits.

Deux cylindres droits ſeront ſemblables, ſi leurs hauteurs ſont en même raiſon que les rayons de leurs baſes.

LXXV.

Celle de deux cylindres obliques.

Si les cylindres ſont obliques, il faudra, de plus, que les lignes qui joignent les centres des deux cercles, dans chacun de ces cylindres, faſſent les mêmes angles ſur les plans de leurs baſes.

LXXVI.

Celle de deux cones.

Les mêmes définitions peuvent s'appliquer aux cones, en mettant au lieu de la ligne qui paſſe par les centres des deux baſes du cylindre, celle qui va du ſommet du cone au centre du cercle qui lui ſert de baſe.

LXXVII.

Pour que deux cones tronqués ſoient ſemblables, il faut, en premier lieu, que les cones dont ils ſont portions

tions soient semblables l'un à l'autre ; & en second lieu, que leurs hauteurs soient entr'elles comme les rayons de leurs bases.

Celle de deux cones tronqués.

LXXVIII.

A l'égard des sphéres, on voit bien qu'elles sont toutes semblables les unes aux autres, ainsi que toutes les figures, soit solides, soit planes, qui n'ont besoin que d'une seule ligne pour être déterminées, comme le cercle, le quarré, le triangle équilatéral, le cube, le cylindre circonscrit à la sphére, &c.

Les sphéres, les cubes, & toutes les figures qui ne dépendent que d'une seule ligne, sont toutes semblables.

LXXIX.

En général on pourra dire des figures solides semblables, comme on l'a dit des figures planes, qu'elles ne différent que par les échelles sur lesquelles elles ont été construites.

En général les solides semblables ne différent que par les échelles sur lesquelles ils sont construits.

Cet exposé seul bien considéré, conduit à deux propositions fondamentales

ſur la ſuperficie & ſur la ſolidité des corps ſemblables.

LXXX.

Les ſurfaces des ſolides ſemblables ſont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.

LA premiere Propoſition apprend que les ſurfaces de deux ſolides ſemblables, ſont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues ; qu'il y a, par exemple, même rapport entre les ſurfaces des deux pyramides ſemblables *z* & Z, qu'entre les quarrés *abcd*, ABCD, faits ſur les côtés *ab*, AB, qui ſe répondent dans ces deux pyramides.

FIG. 5. & 6.

Pour découvrir cette Propoſition, on n'a beſoin que des raiſonnemens qu'on a employés (I. Part. Art. XLIII. & XLIV.), c'eſt-à-dire, qu'il faut ſeulement conſidérer que ſi P eſt l'échelle de la pyramide Z, & *p* l'échelle de la pyramide ſemblable *z*, les lignes qu'il faudra employer pour meſurer la ſurface de Z, & celle du quarré ABCD, auront le même nombre de P, qu'il y

aura de parties *p* dans celles qu'il faut employer pour meſurer la ſurface de *z*, & celle du quarré *abcd.*

Car de-là il ſuit que le produit des lignes qui entrent dans la meſure de Z & de ABCD, donnera le même nombre de quarrés X faits ſur P, que le produit des lignes employées à meſurer *z* & *abcd* donnera de quarrés *x* faits ſur *p*. C'eſt-à-dire, que les nombres qui exprimeront le rapport de la ſurface de la pyramide Z au quarré ABCD, ſeront les mêmes que ceux qui exprimeront le rapport de la ſurface *z* au quarré *abcd.*

On feroit le même raiſonnement dans la comparaiſon de tous les autres corps ſemblables, ſoit que ces corps fuſſent terminés par des plans, ſoit qu'ils fuſſent terminés par des ſurfaces courbes ; car les lignes employées à meſurer les ſuperficies de tous ces corps, auront toûjours le même nombre des parties de leurs échelles, & par conſéquent, les produits de ces lignes contiendront un

même nombre de fois les quarrés de ces mêmes parties.

Et si les lignes nécessaires pour mesurer la superficie des corps semblables, étoient incommensurables, il est clair que la démonstration subsisteroit toûjours, pourvu qu'on employât ici les principes dont on s'est servi (II. Part. Art. XXVIII.) pour comparer les figures semblables, dont les côtés étoient incommensurables.

LXXXI.

Les surfaces des sphéres sont entr'elles comme les quarrés de leurs rayons.

On prouveroit de la même façon, que les surfaces des sphéres sont entr'elles comme les quarrés de leurs rayons. Mais, pour le voir encore plus clairement d'une autre maniere, il suffira de se rappeller que les surfaces des cercles sont entr'elles comme les quarrés de leurs rayons (III. Part. Art. VI.), & que les surfaces des sphéres sont quadruples de leurs grands cercles (Art. LXIX.)

LXXXII.

La proportionnalité entre les ſurfaces des corps ſemblables & les quarrés de leurs côtés homologues, eſt ſi générale qu'elle s'applique autant aux corps qu'on ne ſçait pas meſurer, qu'à ceux dont on connoît la meſure.

Sans ſçavoir meſurer, par exemple, la ſurface d'un cylindre oblique, on peut affirmer que les ſurfaces de deux cylindres obliques ſemblables ſont entr'elles comme les quarrés des diamétres des baſes de ces cylindres. Car en inſcrivant dans ces deux cylindres deux priſmes ſemblables de tant de faces qu'on voudra, on verra, par ce qui précéde, que les ſurfaces de ces priſmes ſeront entr'elles comme les quarrés des diamétres des baſes. Donc les cylindres mêmes, conſidérés comme les derniers des priſmes inſcrits auront leurs ſurfaces dans le même rapport.

LXXXIII.

Les solides semblables sont entr'eux comme les cubes de leurs côtés homologues.

La Proposition fondamentale pour la comparaison de la solidité des corps semblables est celle-ci.

Les solides semblables sont entr'eux comme les cubes de leurs côtés homologues.

Cette Proposition se peut démontrer comme la précédente, en considérant que les figures semblables ne différent que par les échelles sur lesquelles elles sont construites.

Pour le faire voir le plus simplement qu'il nous sera possible, nous nous servirons, par exemple, des deux prismes semblables Z & *z*, & des deux cubes X & *x*, dont les côtés sont égaux à AB, *ab*, lignes analogues dans ces deux prismes; & nous prendrons de plus deux échelles AB, *ab*, divisées en un assez grand nombre de parties, pour pouvoir mesurer les dimensions de ces solides: or cela posé, il est clair qu'il se trou-

Fig. 7. & 8.

Planche XI

Planche XII



Planche XIII.

Fig. I.

Planche XIV

vera précisément autant de cubes faits sur les parties de *ab*, dans le prisme *z*, & dans le cube *x*, que de cubes faits sur les parties de AB dans le prisme Z & dans le cube X.

On feroit le même raisonnement pour tous les autres solides ; & ceux qui pourroient avoir des dimensions incommensurables, seroient aussi dans la même raison que les cubes de leurs côtés homologues.

LXXXIV.

Les solidités des sphéres, par exemple, sont évidemment entr'elles, comme les cubes de leurs rayons.

Les sphéres sont entr'elles comme les cubes de leurs rayons.

FIN.

Fautes à corriger.

PAge 8, ligne 9, *éloignées*, lisez *éloignée.*
P. 23, Art. XXI. lisez XXIII.
P. 40, l. 10, *ce qui*, lisez *ce qu'il.*
P. 55, l. 2, BAC, lisez *b*A*c.*
P. 81, l. 13, *est la seconde*, lisez *est à la seconde.*
P. 84, l. 4 de l'apostille, après *quatriéme*, ajoûtez *terme.*
P. 94, l. 13, *par*, lisez *pas.*
P. 108, dern. ligne de la seconde apostille, au lieu de *circonfé*, lisez *circonférence.*
P. 133, l. 9, *mêmes angles*, lisez *angles égaux.*
P. 151, l. 16, *de même qu'un plan*, lisez *de même, qu'un plan.*
P. 155, l. 18, après *d'égale longueur*, ajoûtez *& qui ne soient pas posées en ligne droite.*
P. 170, l. 3, *seroient toûjours les mêmes*, lisez *auroient toûjours la même solidité.*
P. 184, l. 13, après *égaux*, ajoûtez *& paralléles.*

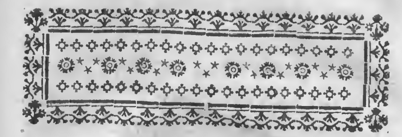


TABLE DES MATIERES.

PREMIERE PARTIE.

Des moyens qu'il étoit le plus naturel d'employer pour parvenir à la mesure des Terrains.

II. *La ligne droite est la plus courte d'un point à un autre, & par conséquent, la mesure de la distance entre deux points.* page 2
III. *Une ligne qui tombe sur une autre, sans pancher sur elle d'aucun côté, est perpendiculaire à cette ligne.* 3
IV. *Le rectangle est une figure de quatre*

côtés perpendiculaires les uns aux autres. 4

Et le quarré est un rectangle dont les quatre côtés sont égaux. ibid.

V. *Maniére d'élever une perpendiculaire.* ibid.

VI. *Le cercle est la trace entiére que décrit la pointe mobile d'un compas, pendant qu'elle tourne autour de l'autre pointe.* 7

Le centre est le lieu de la pointe fixe. ibid.

Le rayon est l'intervalle dont le compas est ouvert. ibid.

Le diamétre est le double du rayon. ibid.

VII. *Maniere d'abaisser une perpendiculaire.* ibid.

VIII. *Couper une ligne en deux parties égales.* 8

IX. *Faire un quarré, ayant son côté.* 9

X. *Faire un rectangle, dont la longueur & la largeur sont données.* ibid.

XI. *Les paralléles sont des lignes toûjours également distantes les unes des autres.* 10

Mener une paralléle à une ligne par un point donné. ibid.

XII. *La mesure d'un rectangle est le produit de sa hauteur par sa base.* 13

XIII. *Les figures rectilignes sont celles que terminent des lignes droites.* 14

Le triangle est une figure terminée par trois lignes droites. ibid.

XIV. *La diagonale d'un rectangle est la ligne qui le partage en deux triangles égaux.* 15

Les triangles rectangles sont ceux qui ont deux de leurs côtés perpendiculaires l'un à l'autre. 16

Un triangle est la moitié du rectangle qui a même base & même hauteur. ibid.

Donc sa mesure est la moitié du produit de sa hauteur par sa base. ibid.

XV. *Les triangles qui ont même hauteur & même base, ont des superficies égales.* 17

XVII. *Les triangles qui ont même base, & qui sont renfermés entre les mêmes paralléles, sont égaux en superficie.* 19

XVIII. *Les parallélogrammes ſont des figures de quatre côtés, dont les deux oppoſés ſont paralléles.* 20

On les meſure en multipliant leur hauteur par leur baſe. ibid.

XIX. *Les parallélogrammes qui ont une baſe commune, & qui ſont entre les mêmes paralléles, ſont égaux en ſuperficie.* ibid.

XX. *Les poligones réguliers ſont des figures que terminent des côtés égaux, & également inclinés les uns ſur les autres.* 21

XXI. *Maniére de décrire un poligone d'un nombre déterminé de côtés.* 22

Le pentagone a cinq côtés, l'exagone ſix, l'eptagone ſept, l'octogone huit, l'enneagone neuf, le décagone dix, &c. ibid.

XXII. *Meſure de la ſurface d'un poligone régulier.* 23

L'apothéme eſt la perpendiculaire abaiſſée du centre de la figure ſur un de ſes côtés. ibid.

XXIII. *Le triangle équilatéral est celui dont les trois côtés sont égaux.* 24
Maniére de le décrire. ibid.
XXVI. *Connoissant les trois côtés d'un triangle, faire un autre triangle qui lui soit égal.* 27
XXVII. *Un angle est l'inclinaison d'une ligne sur une autre.* 29
XXVIII. *Maniére de faire un angle égal à un autre.* ibid.
Deux côtés & l'angle compris étant donnés, le triangle est déterminé. 30
XXIX. *Seconde maniére de faire un angle égal à un autre.* 31
La corde d'un arc de cercle, est la droite que terminent les deux extrémités de l'arc. ibid.
XXX. *Deux angles & un côté déterminent le triangle.* 32
XXXI. *Le triangle isocéle, est celui qui a deux côtés égaux.* ibid.
Les angles que ces côtés font avec la base, sont égaux entr'eux. 33
XXXIV. *En quoi consiste la ressem-*

blance de deux figures. 36

XXXVI. *Maniére de faire une figure semblable à une autre.* 37

XXXVIII. *Si deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle, le troisiéme angle de l'un égalera le troisiéme angle de l'autre.* 40

XXXIX. *Deux triangles, dont les angles sont respectivement égaux, ont leurs côtés proportionnels.* 41

XL. *Diviser une ligne en tant de parties égales qu'on voudra.* 44

XLI. *Ce que c'est qu'une ligne quatriéme proportionnelle à trois autres, & comment on la trouve.* 45

XLII. *Les hauteurs des triangles semblables, sont proportionnelles à leurs côtés.* 46

XLIV. *Les aires des triangles semblables, sont entr'elles comme les quarrés des côtés homologues.* 47

XLV. *Propriétés des figures semblables, tirées de celles des triangles.* 49

XLVII. *Les aires des figures ſemblables, ſont entr'elles comme les quarrés des côtés homologues.* 52

XLVIII. *Les figures ſemblables ne ſont différenciées que par les échelles ſur leſquelles elles ſont conſtruites.* Ibid.

L. *Maniére de meſurer la diſtance d'un lieu inacceſſible.* 54

LII. *Un angle a pour meſure l'arc de cercle qu'interceptent ſes côtés.* 56

LIII. *Le cercle eſt partagé en 360 dégrés; chaque dégré en 60 minutes, &c.* 57

LIV. *L'angle droit a 90 dégrés, & ſes côtés ſont perpendiculaires l'un à l'autre.* 58

LV. *Un angle aigu eſt plus petit qu'un angle droit.* ibid.

LVI. *Un angle obtus eſt plus grand qu'un angle droit.* ibid.

LVII. *La ſomme des angles, fait du même côté ſur une ligne droite, & qui ont le même ſommet, vaut 180 dégrés.* ibid.

LVIII. *Tous les angles qu'on peut faire autour d'un même point, ſont égaux,*

pris ensemble, à quatre droits. 59
LIX. *Usage de l'instrument appellé demi-cercle, pour prendre la grandeur d'un angle.* ibid.
LX. *Usage du rapporteur, pour faire un angle d'un nombre déterminé de dégrés.* 60
LXIII. *Les angles alternes sont les angles renversés que forme, de part & d'autre, une ligne droite qui tombe sur deux paralléles.* 64
Ces angles sont égaux. ibid.
LXIV. *La somme des trois angles d'un triangle, est égale à deux droits.* 65
LXVIII. *L'angle extérieur d'un triangle, vaut les deux angles intérieurs opposés.* 67
LXIX. *Un angle d'un triangle isocéle donne les deux autres.* ibid.
LXX. *Les angles d'un triangle équilatéral, sont chacun de soixante dégrés.* 68
LXXI. *Description de l'exagone.* ibid.
LXXII. *La moitié de l'angle au centre de*

l'exagone, donne l'angle au centre du dodécagone. 69

LXXIII. *Partager un angle en deux également.* 70

LXXIV. *Description des poligones de 24, 48, &c. côtés.* ibid.

LXXV. *Description de l'octogone.* 71

Et des poligones de 16, 32, &c. côtés. 72

SECONDE PARTIE.

De la méthode géométrique de comparer les figures rectilignes.

I. *Deux rectangles qui ont même hauteur, sont en même raison que leurs bases.* 76

V. *Maniére de changer un rectangle en un autre, qui ait une hauteur donnée.* 77

VI. *Seconde maniére de changer un rectangle en un autre, dont la hauteur soit donnée.* 78

VII. *On démontre rigoureusement que si deux rectangles sont égaux, la base du premier est à la base du second, comme la hauteur du second à la hauteur du premier.* 80

VIII. *Si quatre lignes sont telles, que la premiere soit à la seconde, comme la troisiéme à la quatriéme; le rectangle formé par la premiere & par la quatriéme sera égal à celui que forment la seconde & la troisiéme.* 81

IX. *Quatre quantités, dont la premiere est à la seconde, comme la troisiéme à la quatriéme, sont dites former une proportion.* ibid.

X. *Des quatre termes d'une proportion, le premier & le quatriéme sont nommés extrêmes; on nomme moyens le second & le troisiéme.* 82

XI. *Dans une proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.* ibid.

XII. *Si le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, les quatre termes*

forment une proportion. ibid.
XIII. *De-là on tire la régle de trois,* 83
Ou la maniére de trouver le quatriéme terme d'une proportion, dont les trois premiers sont donnés. 84
XVI. *Faire un quarré double d'un autre.* 86
XVII. *Faire un quarré égal à deux autres pris ensemble.* 87
XVIII. *L'hypothénuse d'un triangle rectangle est son grand côté.* 90
Et le quarré de ce côté est égal à la somme des quarrés faits sur les deux autres. ibid.
XIX. *D'où se tire une maniére simple de réduire deux quarrés en un seul.* ibid.
XX. *Si les côtés d'un triangle rectangle servent de bases à trois figures semblables, la figure faite sur l'hypothénuse égalera les deux autres prises ensemble.* 91
XXI. *Réduire plusieurs figures semblables à une seule.* 93
XXIII. *Le produit qui résulte de la mul-*

tiplication d'un nombre par lui-même, est le quarré de ce nombre. 95

La racine d'un quarré, est le nombre qui, multiplié par lui-même, donne le quarré. 96

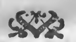
XXIV. *Un nombre est multiple d'un autre, lorsqu'il le contient plusieurs fois exactement.* ibid.

Le côté d'un quarré & sa diagonale sont incommensurables. 97

XXV. *Autres lignes incommensurables.* ibid.

XXVII. *Les triangles & les figures semblables, ont leurs côtés proportionnels, lors même que ces côtés sont incommensurables.* 101

XXVIII. *Et ces figures sont toûjours entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.* 102



TROISIE'ME PARTIE.

De la meſure des figures circulaires, & de leurs propriétés.

I. *La meſure du cercle eſt le produit de ſa circonférence par la moitié de ſon rayon.* 108

II. *L'aire du cercle eſt égale à un triangle dont la hauteur eſt le rayon, & la baſe une droite égale à la circonférence.* ibid.

IV. *Le diamétre d'un cercle ayant 7 parties, la circonférence en a près de 22.* 109

V. *Les circonférences des cercles, ſont entr'elles comme leurs rayons.* 110

VI. *Les aires des cercles ſont proportionnelles aux quarrés de leurs rayons.* 111

VII. *Des trois cercles qui ont pour rayons les trois côtés d'un triangle rectangle, celui que donne l'hypothénuſe vaut les deux autres pris enſemble.* 112

VIII. *Une couronne eſt l'eſpace enfermé*

entre deux cercles concentriques. 113.
Pour mesurer une couronne, il faut multiplier sa largeur par la circonférence moyenne. 115
IX. *Le segment de cercle est un espace terminé par un arc & par sa corde.* 116
La mesure de toutes les figures circulaires se réduit à celle du segment. ibid.
X. *Le secteur est une portion de cercle, terminée par deux rayons, & par l'arc qu'ils comprennent.* ibid.
Sa mesure & celle du segment. ibid.
XI. *Trouver le centre d'un arc de cercle quelconque.* 117
XIII. *Si d'un point quelconque de la circonférence d'un demi cercle, on tire deux droites aux extrémités du diamètre, on aura un angle droit.* 120
XV. *Tous les angles dont le sommet est à la circonférence, & qui s'appuient sur le même arc, sont égaux, & ont, pour commune mesure, la moitié de l'arc sur lequel ils s'appuient.* 123
XVIII. *La tangente au cercle, est la li-*

gne qui ne le touche qu'en un point. 126
L'angle au ſegment eſt celui qui eſt fait par la corde & par la tangente. 127
Sa meſure eſt la moitié de l'arc du ſegment. ibid.
XIX. *La tangente eſt perpendiculaire au diamétre qui paſſe par le point d'attouchement.* 128
XXI. *Ce que c'eſt qu'un ſegment capable d'un angle donné.* 129
Maniére de faire un ſegment capable d'un angle donné. ibid.
XXII. *Trouver la diſtance d'un lieu à trois autres dont les poſitions ſont connues.* 131
XXIII. *Deux cordes ſe coupant dans un cercle, le rectangle des parties de l'une eſt égal au rectangle des parties de l'autre.* 134
XXIV. *Le quarré d'une perpendiculaire quelconque au diamétre d'un cercle, eſt égal au rectangle des deux parties du diamétre.* 135
XXV. *Changer un rectangle en un quarré.* ibid.

XXVI. *Ce que c'est qu'une moyenne proportionnelle entre deux lignes droites.* 136
Maniére de la trouver. 137
XXVII. *Autre maniére.* ibid.
XXVIII. *Changer une figure rectiligne en un quarré.* 138
XXX. *Faire un quarré qui soit à un autre en raison donnée.* 139
XXXI. *Faire un poligone qui soit en raison donnée avec un poligone semblable.* 140
XXXII. *Faire un cercle qui soit à un autre cercle en raison donnée.* 141
XXXIII. *Si d'un point pris hors d'un cercle on tire deux lignes qui le traversent, les rectangles de ces deux droites par leurs parties extérieures, seront égaux.* ibid.
XXXIV. *Le quarré de la tangente est égal au rectangle de la secante par sa partie extérieure.* 143
XXXV. *D'un point donné hors d'un cercle, lui mener une tangente.* ibid.
QUATRIE'ME

QUATRIEME PARTIE.

De la maniére de mesurer les solides & leurs surfaces.

I. *LE cube est une figure solide terminée par six quarrés. C'est la mesure commune des solides.* 147

II. *Le parallélipipéde est un solide terminé par six rectangles.* 148

Les plans paralléles sont ceux qui conservent toûjours entr'eux la même distance. ibid.

III. *Mesure du parallélipipéde.* 149

IV. *Les parallélipipédes sont produits par un rectangle qui se meut parallélement à lui-même.* 151

V. *La ligne perpendiculaire à un plan, est celle qui ne panche d'aucun côté sur ce plan.* ibid.

Il en est de même du plan perpendiculaire à un autre plan. ibid.

VI. *La ligne qui est perpendiculaire à un*

plan est perpendiculaire à toutes les lignes de ce plan, qui partent du point où elle tombe. 152
VIII. *Pratique simple pour élever, ou pour abaisser des lignes perpendiculaires à des plans.* 154
IX. *Une ligne sera perpendiculaire à un plan, si elle est perpendiculaire à deux lignes de ce plan, qui partent du point où elle tombe.* ibid.
X. *Maniére d'élever un plan perpendiculaire à un autre.* 155
XI. *Mener un plan paralléle à un autre.* ibid.
XII. *Mesurer l'inclinaison d'un plan sur un autre.* 156
XIII. *Mesurer l'inclinaison d'une ligne sur un plan.* 157
XIV. *Nouvelle maniére d'abaisser une ligne perpendiculaire à un plan donné.* 158
XV. *Seconde maniére d'élever une ligne perpendiculaire à un plan donné.* ibid.
XVI. *Le prisme droit est une figure solide,*

dont les deux bases opposées sont deux poligones égaux, & les autres faces des rectangles. 159

XVII. *Formation des prismes droits.* ibid.

XIX. *Deux prismes, qui ont des bases égales, sont en même raison que leurs hauteurs.* 160

XX. *Deux prismes qui ont la même hauteur, sont en même raison que leurs bases.* ibid.

XXI. *La mesure du prisme droit est le produit de sa base par sa hauteur.* 162

XXII. *Les prismes obliques différent des prismes droits, en ce que les faces qui sont des rectangles dans ceux-ci, sont des parallélogrammes dans ceux-là.* ibid.

XXIII. *Formation des prismes obliques.* 163

XXIV. *Les prismes obliques sont égaux aux prismes droits, lorsqu'ils ont même base & même hauteur.* 164

XXV. *Il en est de même des parallélipipé-*

des obliques, à l'égard des parallélipides droits. 165
XXXII. *En quoi consiste la similitude de deux pyramides.* 171
XXXVII. *Les pyramides qui ont même base & même hauteur, sont égales.* 175
XXXVIII. *Deux pyramides sont encore égales, si, ayant la même hauteur, leurs bases, sans être des poligones semblables, sont égales en superficie.* ibid.
XXXIX. *Les pyramides qui ont même hauteur, sont entr'elles comme leurs bases.* 176
XLII. *La solidité d'une pyramide quelconque, est le produit de sa base par le tiers de sa hauteur.* 182
XLIII. *La pyramide est le tiers du prisme qui a même base & même hauteur.* 183
XLV. *Le cylindre est un solide terminé par deux bases opposées & paralléles, qui sont des cercles égaux, & par un plan plié autour de leurs circonférences.* 184

On le distingue en cylindre droit, & en cylindre oblique. ibid.
XLVI. *Formation du cylindre.* 185
XLVII. *La surface courbe d'un cylindre droit, est égale à un rectangle qui a la même hauteur, & dont la base est égale à sa circonférence.* 187
XLIX. *Les cylindres, qui ont même base & même hauteur, sont égaux en solidité.* 188
L. *La mesure d'un cylindre quelconque est le produit de sa base par sa hauteur.* ibid.
LI. *Le cone est une espéce de pyramide, dont la base est un cercle.* 189
LII. *On le distingue en cone droit, & en cone oblique.*
LIII. *La surface d'un cone droit se mesure en multipliant la moitié de son côté par la circonférence de sa base.* 190
LIV. *Le développement d'un cone est un secteur de cercle.* ibid.
LVI. *Les cones qui ont même base & même hauteur, sont égaux.* 191
LVII. *Leur mesure est le produit de la*

base par le tiers de la hauteur. ibid.

LIX. *Maniére de mesurer la surface d'un cone tronqué.* 193

LX. *La sphére est le corps dont la surface a tous ses points également éloignés du centre.* 194

LXV. *La surface de la sphére a pour mesure le produit de son diamétre, par la circonférence de son grand cercle.* 202

LXVI. *Ce que c'est qu'un segment de sphére.* ibid.

Comment on mesure sa surface. ibid.

LXVII. *La surface de la sphére est égale à celle du cylindre circonscrit.* 203

LXVIII. *Les tranches du cylindre & de sphére ont la même superficie.* ibid.

LXIX. *La surface de la sphére est égale à quatre fois celle de son grand cercle.* 204

LXX. *La solidité de la sphére est le produit du tiers du rayon par quatre fois l'aire du grand cercle.* 205

LXXI. *La solidité de la sphére est les deux tiers de celle du cylindre circonscrit.* ibid.

LXXII. *Mesure de la solidité d'un segment de sphére.* 206
LXXIII. *En quoi consiste la similitude de deux corps terminés par des plans.* 207
LXXIV. *Conditions qui déterminent la similitude de deux cylindres droits.* 208
LXXV. *Celle de deux cylindres obliques.* ibid.
LXXVI. *Celle des cones.* ibid.
LXXVII. *Celle de deux cones tronqués.* 209
LXXVIII. *Les sphéres, les cubes, & toutes les figures qui ne dépendent que d'une seule ligne, sont toutes semblables.* ibid.
LXXIX. *En général, les solides semblables ne différent que par les échelles sur lesquelles ils sont construits.* ibid.
LXXX. *Les surfaces des solides semblables sont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.* 210

LXXXI. *Les ſurfaces des ſphéres ſont entr'elles, comme les quarrés de leurs rayons.* 212
LXXXIII. *Les ſolides ſemblables ſont entr'eux comme les cubes de leurs côtés homologues.* 214
LXXXIV. *Les ſphéres ſont entr'elles comme les cubes de leurs rayons.* 215

Fin de la Table.

De l'Imprimerie de GISSEY.







